

DAVENPORT · 圆法 · 高中详解版

Waring 问题的渐近公式

Waring's problem: the asymptotic formula

本章要解决什么 · 读完能掌握什么

问题：把一个很大的整数 N 写成 s 个正整数的 k 次幂之和

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k = N, \quad x_1, \dots, x_s \geq 1,$$

一共有多少种写法？把写法的个数记作 $r(N)$ 。本章要证明：当 s 足够大 ($s \geq 2^k + 1$) 时， $r(N)$ 有一个非常精确的"渐近公式"

$$r(N) = C_{k,s} N^{s/k-1} \mathfrak{S}(N) + (\text{小误差}).$$

读完你能掌握：(1) 圆法 (Hardy-Littlewood circle method) 把"数解的个数"变成"算一个积分"的全套思路；(2) 把积分区间 $[0, 1]$ 切成主弧与次弧的技术；(3) 三个核心新对象——指数和 $T(\alpha)$ 、奇异级数 $\mathfrak{S}(N)$ 、奇异积分 J ——分别是什么、为什么要造它们；(4) 公式里每一个常数 $C_{k,s}$ 、每一处误差估计是怎么一步步算出来的。本讲解对原文每一段都逐句展开，凡是原文写"显然""容易看出"的地方，都补成一步一句的完整推导。

阅读方式：黑色叙述跟着 Davenport 原文的段落顺序走；彩色框（预备知识 / 分步推演 / 符号说明 / 配图）是为只有高中知识的同学补的"脚手架"。本章用到大量超出高中的记号，我们先用一节把它们从零讲清，再进入正文。

第 0 节 先把"看不懂的符号"全部讲清楚

正文第一行就会出现 $e(-N\alpha)$ 、 $\int_0^1$ 、 $\sum$ 、 $\ll$ 、 $O(\cdot)$ 这些记号。它们都不在高中课本里。我们先一个一个讲，之后正文里再遇到就不重复了。

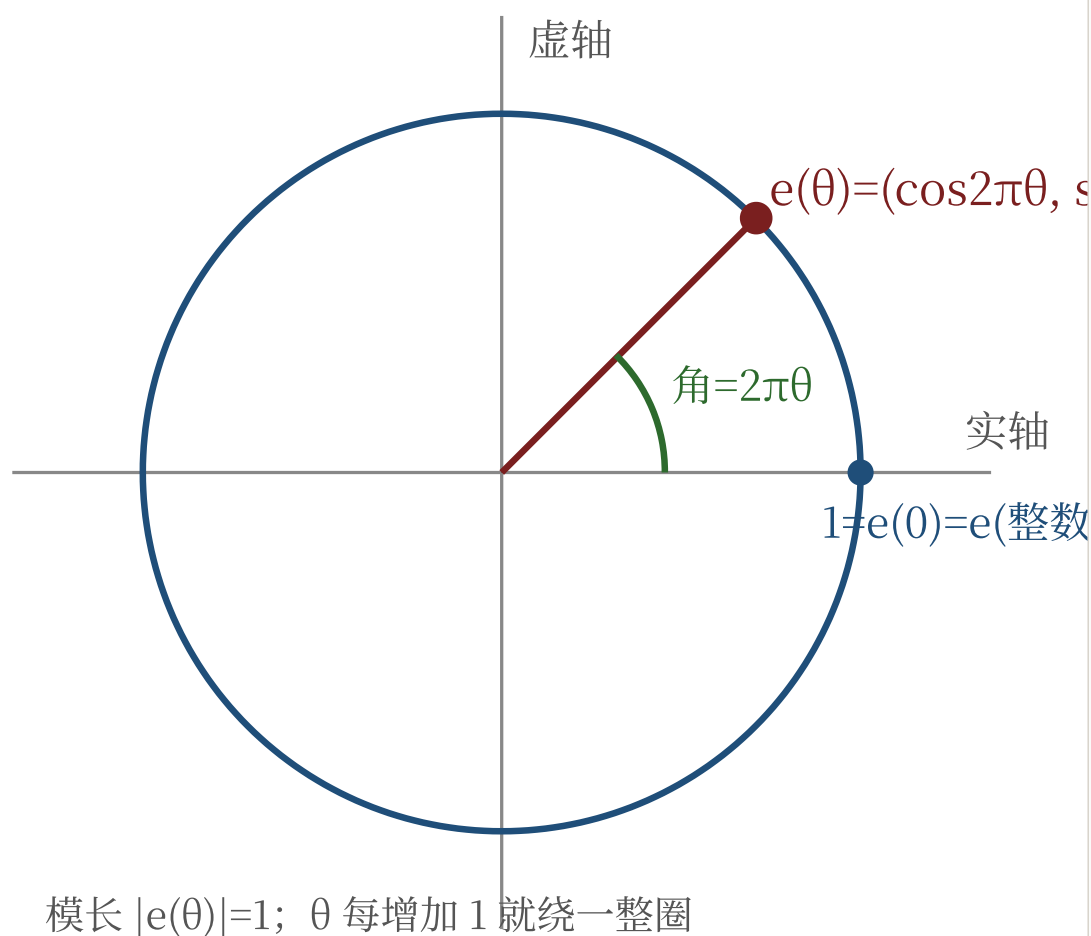
复指数 $e(\theta)$ 。定义

$$e(\theta) := e^{2\pi i \theta} = \cos(2\pi \theta) + i \sin(2\pi \theta).$$

读作"e 括号 theta"。这里 i 是虚数单位 ($i^2 = -1$)， θ 是一个实数。由欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ，把 $x = 2\pi\theta$ 代进去就得到上式。它的几何意义：在复平面里， $e(\theta)$ 是单位圆上的一个点，从正实轴出发逆时针转过 $2\pi\theta$ 弧度（即转过 θ 整圈）。所以：

- 它的模长永远是 1: $|e(\theta)| = \sqrt{\cos^2 + \sin^2} = 1$ 。
- 它以 1 为周期: θ 增加 1 就是多转一整圈，回到原点， $e(\theta + 1) = e(\theta)$ 。更一般地，若 m 是整数则 $e(m) = 1$ 。
- 指数法则照样成立: $e(\theta_1)e(\theta_2) = e(\theta_1 + \theta_2)$ ， $\overline{e(\theta)} = e(-\theta)$ （共轭就是反向转）。

为什么数论里偏爱写 $e(\theta)$ 而不直接写 $e^{2\pi i\theta}$ ？因为"加 1 回到原点"这件事和"整数"高度契合——它把"是不是整数"翻译成了"转了整数圈、回到 1"。



$e(\theta)$ 就是单位圆上"转了 θ 整圈"得到的那个点。整数处全部落回 1。

求和号 $\sum$ 与积分号 $\int$ 。 $\sum_{x=1}^P f(x) = f(1) + f(2) + \cdots + f(P)$ ，就是把 x 从 1 取到 P 的若干项加起来；下面若写成 $\sum_{(a,q)=1}$ 之类，则表示只对"满足那个条件的项"求和。定积分

$\int_a^b f(x) dx$ 高中讲过，是曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴之间在 $[a, b]$ 上的"带符号面积"；当 f 取复数值时，就把实部、虚部分别积分。关键工具是下面这条**正交关系**。

圆法的"心脏"：正交关系 对任意整数 m ,

$$\int_0^1 e(m\alpha) d\alpha = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0. \end{cases} \quad (\star)$$

证明（一步一句）：

1 当 $m = 0$ ：被积函数 $e(0) = 1$ ，于是 $\int_0^1 1 d\alpha = 1$ 。

2 当 $m \neq 0$ （整数）： $e(m\alpha) = e^{2\pi im\alpha}$ ，它对 α 的原函数是 $\frac{e^{2\pi im\alpha}}{2\pi im}$ 。

3 代入上下限： $\int_0^1 e(m\alpha) d\alpha = \frac{e^{2\pi im} - e^0}{2\pi im} = \frac{1 - 1}{2\pi im} = 0$ ，因为 $e^{2\pi im} = e(m) = 1$ （ m 是整数，转整数圈回到 1）。

这条等式之所以是"心脏"：它是一台**筛子**。把一堆 $e(m\alpha)$ 加在一起再积分，只有 $m = 0$ 那一项留下 1，其余全部被积成 0。下面就靠它把"方程 $x_1^k + \cdots + x_s^k = N$ 的解数"从一个积分里筛出来。

大 O 与 $\ll$ 记号（量级的语言）。这两个记号都是用来说"某个量不超过某个量级"的，本章几乎每行都在用。

- $f = O(g)$ 读作" f 是大 O 的 g "，意思是：存在一个与变量无关的常数 $C > 0$ ，使得 $|f| \leq C|g|$ 对所有充分大的 N （或 P ）成立。例如 $N - P^k = O(P^{k-1})$ 就是说 $|N - P^k|$ 至多是 P^{k-1} 的常数倍。
- $f \ll g$ （Vinogradov 记号）与 $f = O(g)$ 完全同义，只是写起来顺手：
 $f \ll g \iff |f| \leq C|g|$ 。
- ε （epsilon）表示"任意小的正数"。式子里出现 P^ε 一般意思是"差一点点、可以忽略的放大"，因为对任何固定正数它都比 P 的任何正次幂小。

直觉：这是一套"只关心增长有多快、不关心常数"的粗略语言。证渐近公式时我们不需要知道误差到底是 3.7 还是 50 倍，只要知道它比主项小一个 P 的正次幂就够了。

整除与互素记号。 (a, q) 表示整数 a, q 的最大公约数（gcd）。 $(a, q) = 1$ 表示 a, q 互素（没有大于 1 的公因数）。"既约分数 a/q "就是指 $(a, q) = 1$ 的分数，无法再约分。mod q （模 q ）：

两个整数若除以 q 余数相同，就称它们“同余 $\bmod q$ ”，属于同一个剩余类； $\bmod q$ 一共有 q 个剩余类，可用代表 $z = 1, 2, \dots, q$ 标记。

欧拉函数 φ 与 Gamma 函数 Γ （先混个眼熟，用到再细讲）。欧拉函数 $\varphi(q)$ 数的是 $1 \leq a \leq q$ 中与 q 互素的 a 的个数——正好是 (4.9) 内层求和的项数。 $\Gamma(t)$ 是阶乘的连续推广：对正整数 n 有 $\Gamma(n) = (n-1)!$ ，一般地 $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ ，满足 $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ 。最后常数 $C_{k,s}$ 就由它写成。

本章主角：指数和 $T(\alpha)$ 。这是上一章 (2.5) 定义的对象，本章从头到尾都在算它：

$$T(\alpha) = \sum_{x=1}^P e(\alpha x^k) = e(\alpha \cdot 1^k) + e(\alpha \cdot 2^k) + \cdots + e(\alpha \cdot P^k).$$

它是 P 个单位圆上的点（ k 次幂处的复指数）相加。 P 是上限，本章取 $P = [N^{1/k}]$ （ $[\cdot]$ 表示取整数部分）。为什么造它？见下面对 (4.1) 的讲解：它的 s 次幂展开后，配上正交关系 (★)，就恰好数出了 $r(N)$ 。

两件来自第 3 章的现成工具（本章直接调用） 本章把上一章证好的两条引理当“黑箱”反复用，先列在这里：

- **引理 3.1（Weyl 不等式型估计）：**若 α 有有理逼近 $||\alpha - a/q|| \leq q^{-K}$ ，则推论给出完全和的估计 $q^{-1} S_{a,q} \ll q^{-1/K+\varepsilon}$ 。
- **引理 3.2（Hua 不等式）：**

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^{2^k} d\alpha \ll P^{2^k-k+\varepsilon}.$$

直觉： 2^k 次幂的积分（数的是“ 2^k 个 k 次幂相减抵消”的方程解数）有一个很好的上界。它专门用来吸收次弧上 $|T|$ 的一个 2^k 次方因子。

你不需要会证这两条；本章的任务是把它们拼起来。下面正文每次引用，我们都会指明用的是哪一条、为什么能用。

第 1 节 起点：把“解的个数”写成一个积分（对应 (4.1)）

原文这一段在讲什么：回到上一章的出发点公式 (4.1)，说明 $r(N)$ 就是某个积分，并确定 P 该取多大、主项应该是什么量级。

原文写道：我们回到 Waring 问题工作的起点，即第 2 章的 (2.7)：

$$r(N) = \int_0^1 (T(\alpha))^s e(-N\alpha) d\alpha. \quad (4.1)$$

为什么 (4.1) 真的等于解的个数——逐步验证 高中同学第一次看到这个公式会觉得很神奇："一个积分怎么会等于一个计数？"我们把它彻底拆开。

1 先把 $T(\alpha)$ 的 s 次方展开。 $T(\alpha) = \sum_{x=1}^P e(\alpha x^k)$, 所以

$$(T(\alpha))^s = \left(\sum_{x_1=1}^P e(\alpha x_1^k) \right) \cdots \left(\sum_{x_s=1}^P e(\alpha x_s^k) \right).$$

按乘法分配律, 这是把"每个括号里挑一项"的所有方式相乘再相加:

$$(T(\alpha))^s = \sum_{x_1=1}^P \cdots \sum_{x_s=1}^P e(\alpha(x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k)),$$

这里用了指数法则 $e(\alpha x_1^k) \cdots e(\alpha x_s^k) = e(\alpha(x_1^k + \cdots + x_s^k))$ 。

2 乘上 $e(-N\alpha)$, 再用指数法则合并:

$$(T(\alpha))^s e(-N\alpha) = \sum_{x_1, \dots, x_s} e(\alpha(x_1^k + \cdots + x_s^k - N)).$$

3 对 α 在 $[0, 1]$ 上积分, 把积分搬进求和号里 (有限和可以逐项积):

$$\int_0^1 (T(\alpha))^s e(-N\alpha) d\alpha = \sum_{x_1, \dots, x_s} \int_0^1 e(\alpha(x_1^k + \cdots + x_s^k - N)) d\alpha.$$

4 用正交关系 (★): 括号里的 $m = x_1^k + \cdots + x_s^k - N$ 是整数。只有当 $m = 0$ (即 $x_1^k + \cdots + x_s^k = N$) 时这一项的积分等于 1, 否则等于 0。

5 于是右边 = "使 $x_1^k + \cdots + x_s^k = N$ 成立的 $(x_1, \dots, x_s)$ 组数"。这正是 $r(N)$ 的定义。证毕。

这就是圆法的全部魔法: 正交关系 (★) 像一台筛子, 把所有"和不等 N "的项积成 0, 只留下"和恰为 N "的项, 每个贡献 1。于是计数问题 = 积分问题。剩下的全部工作, 就是把这个积分算出来。

记号 $r(N)$ 、 s 、 N 、 k 。 N 是要表示的大整数; $k \geq 2$ 是幂次 ($k=2$ 是平方和, $k=3$ 是立方和……); s 是用几个 k 次幂相加 (项数); $r(N)$ 是表示方法的总数。注意这里 x_i 算"有

序"且为正整数, 所以 $2^2 + 3^2$ 与 $3^2 + 2^2$ 算两种。

原文接着说: 其中 $T(\alpha)$ 是 (2.5) 中那个从 1 到 P 求和的指数和, 且 $P \geq [N^{1/k}]$ 。没有必要把 P 取得比所需更大, 所以取 $P = [N^{1/k}]$ 。

为什么取 $P = [N^{1/k}]$, 不多不少

- 1 每个 $x_i \geq 1$, 且 $x_i^k \leq N$ (因为 s 个正项之和等于 N , 单独一项不会超过 N)。所以 $x_i \leq N^{1/k}$ 。两边取整: $x_i \leq [N^{1/k}]$ 。
- 2 这说明: 求和上限只要取到 $P = [N^{1/k}]$ 就足够了——再大的 x 根本不可能出现在任何一组解里, 它们对应的项在 (4.1) 里贡献为 0, 是白加的。
- 3 取 $[N^{1/k}]$ (向下取整) 保证 P 是整数 (求和上限必须是整数), 并且是"刚好够用"的最小上限。这就是"没必要取更大"的含义。

原文: 渐近公式中的主项将被证明具有 $N^{s/k-1}$, 亦即 P^{s-k} 的量级; 事实上, 只要任何简单的渐近公式成立, 它就必须如此, 因为这是 P 的唯一一个与下述事实相容的幂次: $x_1, \dots, x_s$ 各有 P^s 种取法, 而和 $x_1^k + \dots + x_s^k$ 表示的是至多 P^k 量级的数。

"主项必是 P^{s-k} 量级"——一个朴素的概率式估计 这是一段非常重要的"先猜答案"的推理, 要让你信服 P^{s-k} 不是凭空冒出来的。

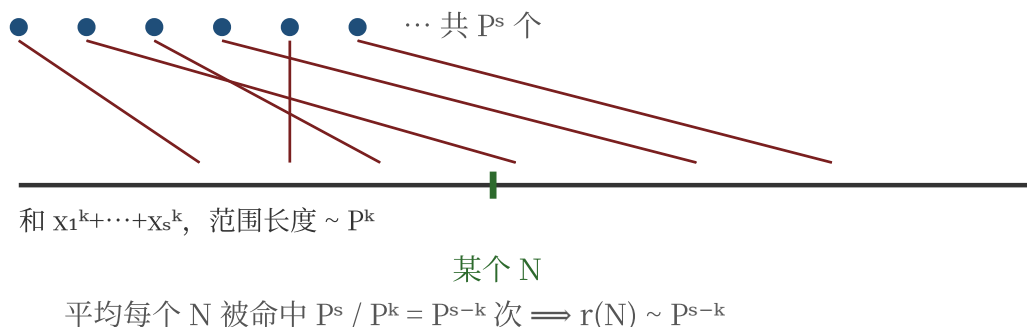
- 1 s 个变量, 每个 x_i 在 1 到 P 间取值, 一共有 $P \times P \times \dots \times P = P^s$ 组取法。
- 2 每一组取法算出的和 $x_1^k + \dots + x_s^k$ 是一个介于 s 与 sP^k 之间的整数, 也就是落在一个长度约为 sP^k 、即量级 P^k 的范围内。
- 3 如果这些和"大致均匀地"散布在这 P^k 个量级的整数上, 那么平均每个整数 N 被命中的次数约为

$$\frac{\text{取法总数}}{\text{落点范围}} = \frac{P^s}{P^k} = P^{s-k}.$$

- 4 于是 $r(N)$ 的"应有量级"就是 P^{s-k} 。又因 $P \approx N^{1/k}$, 把 $P = N^{1/k}$ 代入得 $P^{s-k} = N^{(s-k)/k} = N^{s/k-1}$ 。两种写法 P^{s-k} 与 $N^{s/k-1}$ 是同一回事。

"唯一相容"是什么意思？这只是一个粗糙的概率猜测，但它锁定了主项的幂次：任何更大的幂次会让总命中数超过取法总数 P^s （不可能），任何更小的幂次会让总命中数远小于 P^s （那大量取法的和都跑哪去了？）。所以只有 P^{s-k} 这个指数说得通。真正的工作是把这个"概率猜测"变成严格证明，并算出前面的精确常数——这正是本章余下全部内容。

P^s 组取法 $(x_1, \dots, x_s)$



把 P^s 个取法的和"撒"到长度约 P^k 的数轴上，平均每个 N 的命中数 $\approx P^{s-k}$ 。这就是主项量级的来历。

第 2 节 哪些 α 可以扔掉：次弧的判据（对应第 2 段）

这一段在讲什么：既然主项是 P^{s-k} 量级，那么凡是对积分贡献"严格更小"的 α 区域都可以归进误差、扔掉不算。这一段给出"扔掉的判据"。

原文：于是，凡是对积分 (4.1) 的贡献能被证明严格低于 P^{s-k} 量级的那些 α 取值集合，我们都可以略去。我们假设 $s \geq 2^k + 1$ ，若把被积表达式的绝对值看作

$$|T(\alpha)|^{s-2^k} |T(\alpha)|^{2^k},$$

那么由引理 3.2 可知：凡是满足 $|T(\alpha)| \ll P^{1-\delta}$ （其中 $\delta > 0$ 为某固定数）的任何 α 集合都可以略去。为得到这样一个 α 集合，我们将使用引理 3.1。

记号 δ (delta)。本章自始至终， δ 是一个事先选定、固定不变的小正数（比如可以想成 0.001）。它出现在很多地方（弧的长度、 q 的范围、误差的幂次），含义都一样：一个我们可以自由选小、但一旦选定就不再变的"调节旋钮"。另有 δ' (delta 撇) 表示"由 δ 决定的、某个具体的正数"，每条引理里的 δ' 可以不一样，只要求 > 0 。

为什么把 $|T|^s$ 拆成 $|T|^{s-2^k} \cdot |T|^{2^k}$ ——动机与一步步推导 动机：我们手里只有一条关于积分的现成不等式，就是 Hua 引理 3.2，它专门管 $\int |T|^{2^k}$ 。所以我们想方设法把被积分的 $|T|^s$ 里"留出 2^k 次方去喂给 Hua 引理"，剩下的 $|T|^{s-2^k}$ 用"逐点上界"处理。这要求

$s \geq 2^k$, 原文取 $s \geq 2^k + 1$ (多留一点余量, 保证后面误差里能挤出一个真正的负幂 $-\delta'$)。

1 设在某个 α 集合 E 上, 逐点都有 $|T(\alpha)| \ll P^{1-\delta}$ (这是" T 很小"的假设, 待会儿用引理 3.1 在次弧上验证它)。

2 对 $|T|^{s-2^k}$ 这部分, 逐点代入上界: $|T(\alpha)|^{s-2^k} \ll (P^{1-\delta})^{s-2^k} = P^{(s-2^k)(1-\delta)}$ 。
这是一个与 α 无关的常数上界, 可以提到积分外面。

3 对剩下的 $|T|^{2^k}$, 整体在 E (甚至整个 $[0, 1]$) 上积分, 用 Hua 引理 3.2:

$$\int_E |T|^{2^k} d\alpha \leq \int_0^1 |T|^{2^k} d\alpha \ll P^{2^k-k+\varepsilon}.$$

4 两部分相乘:

$$\int_E |T|^s d\alpha \ll P^{(s-2^k)(1-\delta)} \cdot P^{2^k-k+\varepsilon}.$$

把指数加起来:

$$(s-2^k)(1-\delta) + (2^k-k) + \varepsilon = (s-2^k) - (s-2^k)\delta + 2^k - k + \varepsilon = (s-k) - (s-2^k)\delta + \varepsilon.$$

5 因为 $s \geq 2^k + 1$, 有 $s-2^k \geq 1$, 所以 $-(s-2^k)\delta \leq -\delta$ 。只要 ε 选得比 δ 小 (ε 可任意小, δ 固定), 指数就 $\leq s-k-\delta'$, 其中 $\delta' = \delta - \varepsilon > 0$ 。于是

$$\int_E |T|^s d\alpha \ll P^{s-k-\delta'},$$

比主项 P^{s-k} 小了一个正次幂 $P^{-\delta'}$ 。■

结论: 只要能找到一个 α 集合, 在它上面 $|T(\alpha)| \ll P^{1-\delta}$, 那么这个集合对 (4.1) 的贡献就可以安全扔进误差项。"找这样的集合"就靠引理 3.1 (Weyl 估计), 下一节正式登场。

第 3 节 总体方案：主弧与次弧（对应第 3 段）

这一段在讲什么：介绍圆法处理 Waring 类问题的通用战略——把 $[0, 1]$ 切成"主弧"和"次弧", 并说明两者的分工和取舍。

原文：处理 Waring 问题及类似问题的工作中, 一般性方案是把 α 的取值分为两个集合：主弧 (major arcs), 它对渐近公式中的主项有贡献；以及次弧 (minor arcs), 它的贡献按上面所述

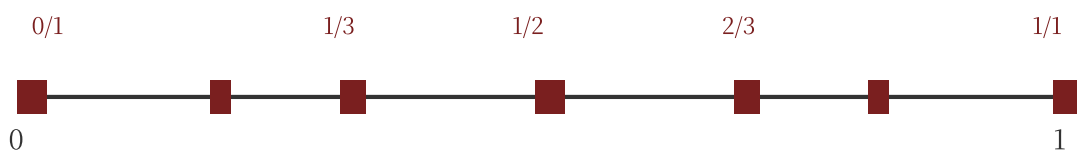
方式估计，归入误差项。两个集合之间精确的分界线，在很大程度上取决于手头有哪些可用的辅助结果，并且在某种程度上可能因人的偏好而异。一般而言，处理主弧有一些强有力的（虽然略显繁复的）方法可用，而问题的关键在于次弧。在任何具体问题中，一旦找到了一种能成功处理次弧的方法，人们通常会发现：在该方法所允许的范围内尽可能扩大次弧是方便的，这样可以减少处理主弧所需的工作量（尽管这部分工作可能相对直接）。在本章的处理中，与本课题其他场合常见的情形相比，我们可以把主弧取得数目较少且长度较短。

"主弧 / 次弧"是什么、为什么叫"弧"、为什么这样分工 什么叫"弧" (arc)？历史上 Hardy 与 Littlewood 是把生成函数看成定义在单位圆周上（变量 $e(\alpha)$ 跑遍圆周），于是 $\alpha \in [0, 1]$ 的子区间就对应圆周上的一段段"圆弧"。后来习惯改在区间 $[0, 1]$ 上做积分，但"弧"的名字保留了下来。所以"主弧""次弧"就是 $[0, 1]$ 上的两类子区间。

分工：

- **主弧 $\mathfrak{M}$** ：那些 α 非常靠近"分母小的既约分数 a/q "的小区间。在这里 $T(\alpha)$ 很大（接近 P ），贡献了渐近公式的主项。这部分计算繁但有套路。
- **次弧 $\mathfrak{m}$** ：主弧之外剩下的全部 α 。在这里 α 远离一切分母小的分数， $T(\alpha)$ 因为相位错乱而很小（ $\ll P^{1-\delta}$ ），整段贡献被第 2 节的方法压进误差项。这部分是真正的难点。

为什么"分界线因人而异、且要尽量扩大次弧"？ 因为分界线只要保证"次弧上 T 足够小"主弧能算出主项"即可，怎么切都行——这取决于你手上的次弧估计（这里是引理 3.1）有多强。次弧能压得越狠、范围划得越大，留给主弧的就越少、主弧越好算。本章因为有较强的工具，可以把主弧取得"又少又短"（ $q \leq P^\delta$ ，区间半长 $P^{-k+\delta}$ ），这是一个值得注意的简化。



红色小块 = 主弧 $\mathfrak{M}$ (围绕分母小的 a/q ，又少又短)
其余整条 = 次弧 $\mathfrak{m}$ (这里 $|T(\alpha)|$ 很小，归入误差)

$[0, 1]$ 被分成围绕简单分数的若干主弧（红块）和它们之外的次弧。注意主弧总长很小，但贡献了主项。

第 4 节 主弧的精确定义（对应 (4.2)(4.3) 那段）

这一段在讲什么：把上面"围绕 a/q 的小区间"写成精确的数学定义，并验证这些区间互不重叠、基本落在 $[0, 1]$ 内。

原文：围绕每个有理数 a/q （既约形式），我们放置一个区间

$$\mathfrak{M}_{a,q} : |\alpha - a/q| < P^{-k+\delta}, \quad (4.2)$$

并且对下述 q, a 都这样做：

$$1 \leq q \leq P^\delta, \quad 1 \leq a \leq q, \quad (a, q) = 1. \quad (4.3)$$

记号 $\mathfrak{M}_{a,q}$ （花体 M，读"major arc a,q"）。它是数轴上以分数 a/q 为中心、半径（半长）为 $P^{-k+\delta}$ 的一个开区间：所有满足 $|\alpha - a/q|$

- 中心 a/q ：既约分数 $((a, q) = 1)$ ，分母 q 受限 $1 \leq q \leq P^\delta$ （很小），分子 $1 \leq a \leq q$ 。
- 半长 $P^{-k+\delta}$ ：因为 $k \geq 2$ 而 δ 很小， $-k + \delta$ 是个相当负的指数，所以这个区间**极短**（长度是 P 的一个大的负次幂）。

为什么中心取"分母小的既约分数"？因为正是在这些点附近， $T(\alpha) = \sum e(\alpha x^k)$ 里大量项的相位接近一致、不互相抵消， $|T|$ 才会大（接近 P ），才有"主项"可言。分母大的分数附近相位散乱， T 小，归次弧。

为什么这些主弧互不重叠——动手算距离 原文说："这些区间不重叠，因为它们的中心之间的距离至少为 $P^{-2\delta}$ ，而这远大于区间的长度。"我们补出计算。

- 1 取两个不同的既约分数中心 a/q 与 a'/q' ，都满足 (4.3)。它们的差

$$\left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| = \frac{|aq' - a'q|}{qq'}.$$

- 2 分子 $|aq' - a'q|$ 是整数。若两个分数不相等，则 $aq' - a'q \neq 0$ （否则交叉相乘相等就是同一个分数），所以 $|aq' - a'q| \geq 1$ 。

- 3 分母 $qq' \leq P^\delta \cdot P^\delta = P^{2\delta}$ （因为各自 $q, q' \leq P^\delta$ ）。于是

$$\left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| \geq \frac{1}{qq'} \geq \frac{1}{P^{2\delta}} = P^{-2\delta}.$$

这就是"中心间距至少 $P^{-2\delta}$ "。

- 4 每个区间半长是 $P^{-k+\delta}$ ，两个相邻区间各伸出半长，要想重叠就需中心距 $< 2P^{-k+\delta}$ 。比较两个量级： $P^{-2\delta}$ 与 $2P^{-k+\delta}$ 。因为 $k \geq 2$ ，指数 -2δ 比 $-k + \delta$ 大得多（ $-2\delta > -k + \delta$ 等价于 $k > 3\delta$ ，对小 δ 当然成立），所以 $P^{-2\delta}$ 远大于 $2P^{-k+\delta}$ 。

5 中心间距远大于两区间半长之和，故任何两个主弧不可能相交。■

原文：此外，除右端的 $1/1$ 处那个区间的右半部分外，这些区间都包含在 $0 \leq \alpha \leq 1$ 内；为方便起见，我们设想把那个区间向左平移一个量 1 ，使它落到 $\alpha = 0$ 的右侧。区间 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 就是主弧，它们关于 $[0, 1]$ 的补集构成次弧，其全体记作 $\mathfrak{m}$ 。在这些定义中， δ 是某个固定的小正数。

关于端点 $0/1$ 和 $1/1$ 的小处理（周期性的体现）

1 满足 (4.3) 且 $q = 1$ 的中心只有一个：因 (4.3) 要求 $1 \leq a \leq q$ ，当 $q = 1$ 时只能取 $a = 1$ ，给出 $a/q = 1/1 = 1$ （注意 $a = 0$ 不被允许）。所以在右端点 $\alpha = 1$ 处恰有一个主弧，其中心就是 1 。

2 围绕 $\alpha = 1$ （即 $1/1$ ）的区间 $(\alpha-1, \alpha)$ 去了，超出 $[0, 1]$ 。

3 但被积函数 $T(\alpha)^s e(-N\alpha)$ 以 1 为周期（因为 $T, e(-N\alpha)$ 都以 1 为周期，整数处复指数回到 1 ）。所以把超出 $[0, 1]$ 那半段向左平移 1 ，它就接到 $\alpha = 0$ 的右边，和围绕 $\alpha = 0$ 的左半段拼成一个完整区间，积分值不变。这就是“想象平移一个量 1 ”。

4 处理好端点后：所有主弧的并记作 $\mathfrak{M}$ ， $[0, 1]$ 里剩下的部分（补集）就是次弧 $\mathfrak{m}$ （花体小写 m ）。

原文末尾的备注：可以指出，在 Hardy–Littlewood 方法的许多应用中，(4.2) 中 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 的长度会带有一个因子 q^{-1} 以及 P 的某个负幂；但此处不需要这个因子，省略它是一个轻微的简化。

为什么这里不要 q^{-1} 因子（取舍说明）。常见写法是让分母大的主弧更短（半长含 q^{-1} ），使所有主弧互不重叠且总长可控。本章因为把 q 直接限死在 $q \leq P^\delta$ （很小），上面已直接验证了不重叠，不再需要用 q^{-1} 去“防重叠”。少一个因子，后面提取主项的计算就更干净。这是一个为了简化而做的、无伤大雅的选择。

第 5 节 引理 4.1：次弧的贡献确实小

这一段在讲什么：正式证明“次弧 $\mathfrak{m}$ 上 $\int |T|^s$ 比主项 P^{s-k} 小一个正次幂”，从而次弧整体可以归入误差。

引理 4.1. 若 $s \geq 2^k + 1$, 则有

$$\int_m |T(\alpha)|^s d\alpha \ll P^{s-k-\delta'},$$

其中 δ' 是依赖于 δ 的一个正数。

证明前先理清思路 第 2 节已经证明: 只要在某集合上逐点 $|T(\alpha)| \ll P^{1-\delta}$, 该集合的 $\int |T|^s$ 就 $\ll P^{s-k-\delta'}$ 。所以引理 4.1 的**唯一任务**, 是证明"次弧 m 上处处 $|T(\alpha)|$ 很小"。这要靠 (a) Dirichlet 逼近定理给每个 α 找一个好的有理逼近, (b) 在次弧上这个逼近的分母 q 一定很大, (c) 分母大时 Weyl 估计 (引理 3.1) 说 T 很小。下面逐条来。

证.

第一步: Dirichlet 逼近定理给每个 α 一个好分数。 原文: "由 Dirichlet 关于丢番图逼近的经典结果, 每个 α 都有一个有理逼近 a/q 满足

$$1 \leq q \leq P^{k-\delta}, \quad |\alpha - a/q| < q^{-1} P^{-k+\delta}. \quad (4.4)$$

此外, 当 $0 < \alpha < 1$ 时我们总有 $1 \leq a \leq q$ 。"

Dirichlet 逼近定理是什么、为什么 (4.4) 成立 定理 (Dirichlet, 1842): 对任意实数 α 和任意正整数 Q , 存在既约分数 a/q , 使得

$$1 \leq q \leq Q, \quad |\alpha - a/q| < \frac{1}{qQ}.$$

这说的是"任何实数都能被一个分母不太大的分数逼近得相当好"。

1 它为什么对? (鸽笼原理) 考虑 $Q+1$ 个数 $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{Q\alpha\}$ ($\{\cdot\}$ 是小数部分), 它们都落在 $[0, 1)$ 。把 $[0, 1)$ 等分成 Q 个小段, $Q+1$ 个数放进 Q 个段, 必有两个落在同一段 (鸽笼原理), 设是 $\{i\alpha\}$ 与 $\{j\alpha\}$ ($i > j$), 则 $|(i-j)\alpha - (\text{某整数 } a)| < 1/Q$ 。取 $q = i-j \leq Q$ 即得 $|q\alpha - a| < 1/Q$, 除以 q 得 $|\alpha - a/q| < 1/(qQ)$ 。

2 怎么得到 (4.4)? 在本章里取 $Q = P^{k-\delta}$ 。代入: 存在 a/q , $1 \leq q \leq P^{k-\delta}$, 且

$$|\alpha - a/q| < \frac{1}{q P^{k-\delta}} = q^{-1} P^{-(k-\delta)} = q^{-1} P^{-k+\delta}.$$

这正是 (4.4)。

- 3 为何 $0 < \alpha < 1$ 时 $1 \leq a \leq q$? 因 $\alpha \in (0, 1)$ 且 a/q 离 α 很近, 故 a/q 也大致在 $(0, 1)$ 内, 于是分子 a 介于 1 与 q 之间 (必要时调整 a 取最靠近的那个)。

第二步: 在次弧上分母 q 必大。原文: "由于 (4.4) 中最后一个不等式比 (4.2) 中的更强, 若 $q \leq P^\delta$, 则 α 应当落在某个 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 中。因此, 若 α 落在 $\mathfrak{m}$ 中, 我们必有 $q > P^\delta$ 。"

逐步说清这个"反证"

- 1 (4.4) 给的逼近误差是 $|\alpha - a/q|$ 更小 (更强)。换句话说, (4.4) 的 a/q 离 α 比"落入主弧所需"还近。
- 2 假设 $q \leq P^\delta$ 。那么这个 a/q 满足 (4.3) 的全部条件 ($1 \leq q \leq P^\delta$, $1 \leq a \leq q$, $(a, q) = 1$), 它就是一个合法的主弧中心; 而 α 离它 $|\alpha - a/q|$ 比 $1/q$ 还近。
- 3 但 α 在次弧 $\mathfrak{m}$ 里, 按定义不在任何主弧里——矛盾。所以假设错误, 必有 $q > P^\delta$ 。

一句话: 次弧上的 α , 它最好的有理逼近的分母都大于 P^δ 。这正是"远离一切简单分数"的精确表达。

第三步: 分母大 $\Rightarrow T$ 小 (用引理 3.1)。原文: "由于 $|\alpha - a/q|$

为什么能用引理 3.1, 以及它给出多小

- 1 验证引理 3.1 的前提 $|\alpha - a/q|$ 由 (4.4) 与 $q \leq P^{k-\delta}$: $|\alpha - a/q| \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{P^k} + \frac{q}{P^k}$ 。
- 2 引理 3.1 给的上界。它是 $|T(\alpha)| \ll P^{1+\varepsilon} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{P} + \frac{q}{P^k} \right)^{1/K}$, $K = 2^{k-1}$ 。我们要说明括号里的三项都 $\ll P^{-\delta}$:
- $\frac{1}{q} \leq P^{-\delta}$ (因 $q \geq P^\delta$);
 - $\frac{1}{P} \leq P^{-\delta}$ (因 $\delta < 1$);
 - $\frac{q}{P^k} \leq \frac{P^{k-\delta}}{P^k} = P^{-\delta}$ (因 $q \leq P^{k-\delta}$, 即原文说的 $P^k/q \geq P^\delta$)。

三项都 $\ll P^{-\delta}$, 故括号 $\ll P^{-\delta}$, 取 $1/K$ 次方得括号 $^{1/K} \ll P^{-\delta/K}$ 。代回:

$$|T(\alpha)| \ll P^{1+\varepsilon} \cdot P^{-\delta/K} = P^{1+\varepsilon-\delta/K}.$$

这就是原文的 $|T(\alpha)| \ll P^{1+\varepsilon-\delta/K}$ 。

由于 ε 可任意小、 δ/K 固定为正，这个指数 $1 + \varepsilon - \delta/K$ 严格小于 1，正是第 2 节需要的 " $|T| \ll P^{1-\delta_0}$ " 形式（这里 $\delta_0 = \delta/K - \varepsilon > 0$ ）。

第四步：拼起来。原文："按前面指出的方式把它与引理 3.2 结合，我们推出

$$\int_m |T(\alpha)|^s d\alpha \ll P^{(s-2^k)(1+\varepsilon-\delta/K)} \int_0^1 |T(\alpha)|^{2^k} d\alpha \ll P^{s-k-\delta'},$$

其中 $\delta' > 0$ 依赖于 δ 。这就证明了引理 4.1。"

最后这步指数的完整加法

1 在 m 上把 $|T|^s = |T|^{s-2^k} \cdot |T|^{2^k}$ 。逐点代第三步的上界处理前半：
 $|T|^{s-2^k} \ll P^{(s-2^k)(1+\varepsilon-\delta/K)}$ ，提到积分外。

2 剩下的 $|T|^{2^k}$ 在 $m \subseteq [0, 1]$ 上积分，用 Hua 引理 3.2: $\leq \int_0^1 |T|^{2^k} \ll P^{2^k-k+\varepsilon}$ 。

3 相乘，指数相加：

$$(s - 2^k)(1 + \varepsilon - \delta/K) + (2^k - k + \varepsilon).$$

展开第一项: $(s - 2^k) + (s - 2^k)\varepsilon - (s - 2^k)\delta/K$ 。全部相加：

$$\underbrace{(s - 2^k) + (2^k - k)}_{= s - k} + \underbrace{(s - 2^k + 1)\varepsilon}_{\text{可任意小}} - \underbrace{(s - 2^k)\frac{\delta}{K}}_{\geq \delta/K > 0}.$$

4 因 $s \geq 2^k + 1 \Rightarrow s - 2^k \geq 1$ ，该项负贡献至少是 $-\delta/K$ 。选 ε 充分小，使 $(s - 2^k + 1)\varepsilon < \frac{\delta}{2K}$ ，则总指数 $\leq s - k - \frac{\delta}{2K}$ 。取 $\delta' = \frac{\delta}{2K} > 0$ 即得

$$\int_m |T|^s d\alpha \ll P^{s-k-\delta'}.$$

■

意义：次弧整体的贡献比主项 P^{s-k} 小了一个 $P^{-\delta'}$ ，可以放进误差。难点（次弧）至此攻克，剩下就是把主弧的主项算出来。

原文补充：可以指出，除了诉诸 Dirichlet 定理之外，也可以利用连分数的一个简单性质：若取 a/q 为满足 $q \leq P^{k-\delta}$ 的 α 的最后一个渐近分数，同样得到 (4.4)。

连分数与渐近分数（补充说明）。任何实数 α 可以写成连分数 $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$ ，截

到第 n 步得到的分数 p_n/q_n 叫"渐近分数" (convergents)。它有一个经典性质：

$|\alpha - p_n/q_n| < 1/(q_n q_{n+1})$ 。取"分母 $\leq P^{k-\delta}$ 的最后一个渐近分数"，下一个分母 $q_{n+1} > P^{k-\delta}$ ，于是 $|\alpha - p_n/q_n| < 1/(q_n P^{k-\delta}) = q_n^{-1} P^{-k+\delta}$ ，正是 (4.4)。这只是 Dirichlet 定理的一种等价替代来源，结论一样。

第 6 节 走向主弧： $T(\alpha)$ 在主弧上几乎不变（对应"现在我们把注意力转向主弧"那段）

这一段在讲什么：动机铺垫。说明在如此短的主弧上， $T(\alpha)$ 变化很平缓，为下面引理 4.2 把 T 近似成"完全和 $\times$ 积分"做准备。

原文：现在我们把注意力转向主弧 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 。这里 α 非常接近 a/q ，且 q 相对较小。如果 (4.2) 中 P 的指数取的是 $-k - \delta$ 而非 $-k + \delta$ ，则 $T(\alpha)$ 在 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 上将几乎是常数，因为那时我们应有

$$\left| \alpha x^k - \frac{a}{q} x^k \right| < P^{-k-\delta} P^k = P^{-\delta}.$$

当然，情形并非如此，但尽管如此，弧 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 是如此之短，以至于 $T(\alpha)$ 在该区间上的变化相对平缓。它究竟如何变化，可由下面的引理看出。

这段"假设性计算"想说明什么

把 α 写成 $\alpha = \frac{a}{q} + \beta$ ， β 是" α 偏离中心 a/q 的小量"。则 T 的每一项相位 $\alpha x^k = \frac{a}{q} x^k + \beta x^k$ 。其中 $\frac{a}{q} x^k$ 只依赖 $x \bmod q$ （因 $e(\frac{a}{q} x^k)$ 以 q 为周期），是"主结构"； βx^k 是"扰动"。

1 扰动的大小： $|\beta x^k| \leq |\beta| P^k$ （因 $x \leq P$ ）。假如区间半长是 $P^{-k-\delta}$ （即 $|\beta|$ 几乎是常数。

2 但实际半长是 $P^{-k+\delta}$ （指数是 $+\delta$ 不是 $-\delta$ ），于是 $|\beta x^k|$ 可达 $P^{+\delta} \rightarrow \infty$ ，扰动不可忽略， T 并非常数。

3 不过区间仍然极短，扰动是"缓慢、有规律"的—— βx^k 随 x 平滑变化。这提示我们：可以把"对 x 求和"近似成"对连续变量积分"，扰动部分恰好变成积分 $I(\beta) = \int_0^P e(\beta \xi^k) d\xi$ 。这正是引理 4.2 要做的。

为什么当初把半长取 $+\delta$ 而非 $-\delta$? 取 $-\delta$ 虽让 T 成常数、主弧好算, 但那样主弧太短、次弧太大, 次弧反而压不住。取 $+\delta$ 是为了让次弧那边的引理 3.1 够用 (见第 5 节第三步正需 $q > P^\delta$ 这个宽度)。这是主弧与次弧之间的平衡取舍。

第 7 节 引理 4.2: 在主弧上把 $T(\alpha)$ 拆成"完全和 $\times$ 积分"

引理 4.2. 对于 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 中的 α , 令 $\alpha = \beta + a/q$, 我们有

$$T(\alpha) = q^{-1} S_{a,q} I(\beta) + O(P^{2\delta}), \quad (4.5)$$

其中

Multiple \tag

三个新对象的含义与动机。

- β (beta): α 相对主弧中心 a/q 的偏移量, $\beta = \alpha - a/q$, 满足 $|\beta| < P^{-\delta}$
- $S_{a,q}$ (完全指数和 / 高斯型和): 把 z 取遍模 q 的一组完全剩余 $1, \dots, q$, 对 $e(az^k/q)$ 求和。它只依赖算术信息 (a, q, k) , 与 P 、与 α 的精细位置无关, 捕捉了" k 次幂模 q 的分布"。后面奇异级数就由它搭成。
- $I(\beta)$ (积分 / 连续模型): 把求和 $\sum e(\beta x^k)$ 换成积分 $\int_0^P e(\beta \xi^k) d\xi$ 。它只依赖分析信息 (实数 k 次幂的均匀分布), 是"把整数换成实数"的连续逼近。后面奇异积分由它搭成。

(4.5) 的深刻之处: 它把 $T(\alpha)$ 在主弧上因式分解成"算术因子 $q^{-1} S_{a,q}$ "乘"分析因子 $I(\beta)$ ", 外加一个小误差。算术与分析就此分离, 分别处理, 最后分别长成奇异级数与奇异积分。

证.

第一步: 按剩余类合并。 原文: "我们把定义 $T(\alpha)$ 的和中那些位于同一剩余类 (模 q) 的 x 值收集到一起……令 $x = qy + z$, $1 \leq z \leq q$ ……得到

$$T(\alpha) = \sum_{z=1}^q e(az^k/q) \sum_y e(\beta(qy + z)^k).$$

"

这个代换为什么自然、怎么算出来的

1 动机：相位 $\alpha x^k = \frac{a}{q}x^k + \beta x^k$ 。第一块 $e(\frac{a}{q}x^k)$ 关于 x 以 q 为周期（把 x 加 q , $\frac{a}{q}(x+q)^k$ 与 $\frac{a}{q}x^k$ 相差整数倍 a , e 不变）。所以按 $x \bmod q$ 分类，每类内第一块取相同值，自然该合并。

2 代换：每个 $1 \leq x \leq P$ 唯一写成 $x = qy + z$ ，其中 $z \in \{1, \dots, q\}$ 是类代表， $y \geq 0$ 是"第几圈"。代入相位：

$$\alpha x^k = \frac{a}{q}(qy + z)^k + \beta(qy + z)^k.$$

3 看第一块 $\frac{a}{q}(qy + z)^k$ 。把 $(qy + z)^k$ 二项展开，除了末项 z^k ，其余每项都含因子 q ，乘上 $\frac{a}{q}$ 后是整数倍。所以 $e(\frac{a}{q}(qy + z)^k) = e(\frac{a}{q}z^k)$ ——只剩 z ，与 y 无关。这步是关键化简。

4 于是

$$T(\alpha) = \sum_{x=1}^P e(\alpha x^k) = \sum_{z=1}^q e\left(\frac{az^k}{q}\right) \sum_y e(\beta(qy + z)^k),$$

内层 y 取遍使 $1 \leq qy + z \leq P$ 的整数（范围依赖 z ）。外层那个 $\sum_{z=1}^q e(az^k/q)$ 正是 $S_{a,q}$ 的"积木"，但注意此处它还乘着内层依赖 z 的和，尚未完全分离。

第二步：把内层求和换成积分（理想情形）。原文：把离散 y 换成连续 η ，再换元 $\xi = q\eta + z$ ， ξ 跑遍 $[0, P]$ ，得

$$\sum_y e(\beta(qy + z)^k) \approx q^{-1} \int_0^P e(\beta\xi^k) d\xi = q^{-1} I(\beta),$$

因子 q^{-1} 来自 $d\eta/d\xi$ 。这恰好给出 (4.5) 的主项。

为什么会冒出 q^{-1} ，以及主项怎么拼成

1 把内层和 $\sum_y f(y)$ ($f(y) = e(\beta(qy + z)^k)$) 近似为 $\int f(\eta) d\eta$ 。

2 换元 $\xi = q\eta + z$ ，则 $\eta = (\xi - z)/q$ ， $d\eta = \frac{d\xi}{q}$ 。当 η 跑遍 $\setminus(0$

3 代回第一步：

$$T(\alpha) \approx \sum_{z=1}^q e\left(\frac{az^k}{q}\right) \cdot q^{-1} I(\beta) = q^{-1} \left(\sum_{z=1}^q e(az^k/q) \right) I(\beta) = q^{-1} S_{a,q} I(\beta).$$

注意 $I(\beta)$ 与 z 无关，可提出求和号外，外层求和就恰好凑成 $S_{a,q}$ 。这就是 (4.5) 的主项 $q^{-1} S_{a,q} I(\beta)$ 。剩下要做的，是证明"求和换积分"造成的误差确实只有 $O(P^{2\delta})$ 。

第三步：估计"求和 - 积分"的误差。原文用了一个粗糙但够用的引理：若 f 可微，则当 $|\eta - y| \leq \frac{1}{2}$ 时 $|f(\eta) - f(y)| \leq \frac{1}{2} \max |f'|$ ；从而对任意区间 $[A, B]$

把这个误差一项项算清楚

1 为什么"和-积分"的误差是 $(B - A) \max |f'| + \max |f|$ ？把 $[A, B]$ 切成长度 1 的小段。在每个长度 1 的小段上，整数点 y 处的 $f(y)$ 与该段积分 $\int f$ 的差，至多是 f 在段内的波动 $\leq \max |f'|$ （中值定理： f 在长 1 区间变化不超过其导数最大值）。共约 $B - A$ 段，累计 $\ll (B - A) \max |f'|$ ；两端不完整的"残段"再补一个 $\max |f|$ 。合起来就是该式。

2 算 $\max |f'|$ 。 $f(\eta) = e(\beta(q\eta + z)^k) = e^{2\pi i \beta(q\eta + z)^k}$ ，链式法则求导：

$$f'(\eta) = 2\pi i \beta \cdot k(q\eta + z)^{k-1} \cdot q \cdot f(\eta).$$

取模 ($|f| = 1$, $|2\pi i| = 2\pi$, $|q\eta + z| \leq P$):

$$|f'(\eta)| \leq 2\pi k q |\beta| P^{k-1} \ll q |\beta| P^{k-1}.$$

3 算 $B - A$ 。 y 的范围由 $0 \leq y \leq P$

4 代入合并。

$$(B - A) \max |f'| + \max |f| \ll \frac{P}{q} \cdot q |\beta| P^{k-1} + 1 = |\beta| P^k + 1.$$

由主弧定义 $|\beta| \leq P^{-\delta}$

5 外层对 z 求和。外面有 q 个 z ($z = 1, \dots, q$)，每个带 $\ll P^\delta$ 的误差，且 $|e(az^k/q)| = 1$ 不放大。总误差 $\ll q \cdot P^\delta \leq P^\delta \cdot P^\delta = P^{2\delta}$ （用了 $q \leq P^\delta$ ）。这正是 (4.5) 里的 $O(P^{2\delta})$ 。■

检查这误差确实小：主项 $q^{-1}S_{a,q}I(\beta)$ 的量级可达 P （见下条），而误差只有 $P^{2\delta}$ （ δ 很小），两者相差一个 P 的接近一次的正幂，所以 (4.5) 是一个很好的近似。

原文补充：稍后在引理 9.1 中，我们将遇到一种更有效的、用对应积分替换求和的方法。（这里用的是最粗糙够用的版本，足以得到 $O(P^{2\delta})$ 。）

第 8 节 引理 4.3：把主弧的积分整体算成"奇异级数 $\times$ 奇异积分"

引理 4.3. 若 $\mathfrak{M}$ 表示主弧 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 的全体，则

$$\int_{\mathfrak{M}} (T(\alpha))^s e(-N\alpha) d\alpha = P^{s-k} \mathfrak{S}(P^\delta, N) J(P^\delta) + O(P^{s-k-\delta'}) \quad (4.8)$$

对某个 $\delta' > 0$ 成立，其中

$$\mathfrak{S}(P^\delta, N) = \sum_{q \leq P^\delta} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q (q^{-1}S_{a,q})^s e(-Na/q), \quad (4.9)$$

$$J(P^\delta) = \int_{|\gamma| < P^\delta} \left(\int_0^1 e(\gamma \xi^k) d\xi \right)^s e(-\gamma) d\gamma. \quad (4.10)$$

两个"截断版"新对象。

- $\mathfrak{S}(P^\delta, N)$ （截断奇异级数，花体 S）：把每个主弧贡献的算术因子 $(q^{-1}S_{a,q})^s e(-Na/q)$ 对所有 $q \leq P^\delta$ 、所有与 q 互素的 a 求和。它是"算术信息"的总和。"截断"指 q 只加到 P^δ （真正的奇异级数 (4.12) 加到 ∞ ）。
- $J(P^\delta)$ （截断奇异积分）：把分析因子整理成一个对 γ （ $= \beta P^k$ 的标准化变量）在 $|\gamma| < P^\delta$ 上的积分。

引理 4.3 的核心成就：主弧上的总积分 $\approx P^{s-k} \times$ （算术总和） $\times$ （分析总和）。算术与分析彻底分家。

证.

第一步：把 (4.5) 提到 s 次幂。原文：由 $|q^{-1}S_{a,q}I(\beta)| \leq P$ 平凡成立，

$$(T(\alpha))^s = (q^{-1}S_{a,q})^s (I(\beta))^s + O(P^{s-1+2\delta}). \quad (4.11)$$

为什么 s 次幂的误差是 $O(P^{s-1+2\delta})$

1 记 $A = q^{-1}S_{a,q}I(\beta)$ (主项), $T = A + E$, 其中 $E = O(P^{2\delta})$ 是 (4.5) 的误差。要估计 $T^s - A^s = (A + E)^s - A^s$ 。

2 用二项式: $(A + E)^s - A^s = \binom{s}{1}A^{s-1}E + \binom{s}{2}A^{s-2}E^2 + \dots$ 。每一项都含至少一个 E , 最大的一项是 $sA^{s-1}E$ 。

3 "平凡上界" $|A| = |q^{-1}S_{a,q}I(\beta)| \leq P$: 因为 $|q^{-1}S_{a,q}| \leq 1$ ($S_{a,q}$ 是 q 个模长 1 的项之和, $|S_{a,q}| \leq q$, 除以 q 得 ≤ 1), 且 $|I(\beta)| = |\int_0^P e(\beta\xi^k)d\xi| \leq \int_0^P 1 d\xi = P$ 。故 $|A| \leq P$ 。

4 于是主误差项 $\ll P \cdot |A|^{s-1} \cdot |E|$? 更直接:
 $|T^s - A^s| \ll |A|^{s-1}|E| \ll P^{s-1} \cdot P^{2\delta} = P^{s-1+2\delta}$ (高次 E 项更小, 被吸收)。
 这就是 (4.11) 的误差 $O(P^{s-1+2\delta})$ 。

第二步: 取主项, 乘 $e(-N\alpha)$ 在单个主弧上积分。因为 $\alpha = a/q + \beta$, $e(-N\alpha) = e(-Na/q)e(-N\beta)$, 主项给出 $\int_{|\beta| \leq P^{-\delta}} (q^{-1}S_{a,q})^s e(-Na/q) e(-N\beta) d\beta$ 与 q, a 无关, 故对满足 (4.3) 的 q, a 求和, 算术因子凑成 $\mathfrak{S}(P^\delta, N)$: $\int_{|\beta| \leq P^{-\delta}} S(P^\delta, N) d\beta$

这一步的关键: 算术与积分分离

1 主弧 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 上积分即对 β 在 $|\beta| \leq P^{-\delta}$

2 被积主项 $(q^{-1}S_{a,q})^s (I(\beta))^s e(-Na/q) e(-N\beta)$ 中, $(q^{-1}S_{a,q})^s e(-Na/q)$ 与 β 无关, 提到积分外。剩下 $\int_{|\beta| \leq P^{-\delta}} (I(\beta))^s e(-N\beta) d\beta$

3 这个 β -积分里没有 a, q ($I(\beta)$ 只含 β), 对所有主弧都一模一样。所以把所有主弧加起来时, 它作为公因子提出, 前面剩下 $\sum_{q \leq P^\delta} \sum_{(a,q)=1} (q^{-1}S_{a,q})^s e(-Na/q) = \mathfrak{S}(P^\delta, N)$ 。算术求和与分析积分就此分离成两个独立因子。

第三步: 把 N 换成 P^k , 并标准化得 $P^{s-k}J(P^\delta)$ 。原文: 因 $N - P^k \ll P^{k-1}$, 故 $|e(-\beta N) - e(-\beta P^k)| \ll |\beta| P^{k-1} \ll P^{-1+\delta}$, 从而把 N 换 P^k 在积分中产生的误差 $\ll P^{-k+\delta} P^s P^{-1+\delta}$; 配上 $|\mathfrak{S}| \ll P^{2\delta}$ 的粗估, 最终误差 $P^{s-k-1+4\delta}$ 可忽略。换后再令 $\xi = P\xi', \beta = P^{-k}\gamma$, 积分变成 $P^{s-k}J(P^\delta)$ 。

逐步：为什么能把 N 换 P^k ，以及标准化换元

1 $N - P^k \ll P^{k-1}$ 为什么? $P = [N^{1/k}]$ 是 $N^{1/k}$ 向下取整, 故 $P \leq N^{1/k}$

2 替换误差。 $e(-\beta N) - e(-\beta P^k) = e(-\beta P^k)(e(-\beta(N - P^k)) - 1)$ 。用 $|e(\theta) - 1| = |e^{2\pi i \theta} - 1| \leq 2\pi|\theta|$ (单位圆上弦长 $\leq$ 弧长):

$$|e(-\beta N) - e(-\beta P^k)| \leq 2\pi|\beta||N - P^k| \ll |\beta|P^{k-1}.$$

再用 $|\beta|$

3 这误差在整段积分里的累积。被积的 $(I(\beta))^s$ 模 $\leq P^s$, 积分区间长 $\ll P^{-k+\delta}$, 所以换 $N \rightarrow P^k$ 在 β -积分里造成的误差 $\ll P^{-k+\delta} \cdot P^s \cdot P^{-1+\delta} = P^{s-k-1+2\delta}$ 。再乘上算术因子的粗估 $|\mathfrak{S}(P^\delta, N)| \ll P^{2\delta}$, 总误差 $\ll P^{s-k-1+4\delta}$ 。因含 P^{-1} (再减小 1 次幂), 比主项 P^{s-k} 小, 可忽略。

4 为什么 $|\mathfrak{S}(P^\delta, N)| \ll P^{2\delta}$? 项数: $q \leq P^\delta$ 有 $\leq P^\delta$ 个, 每个 q 的 a 有 $\leq q \leq P^\delta$ 个, 共 $\ll P^{2\delta}$ 项; 每项 $|(q^{-1}S_{a,q})^s e(-Na/q)| \leq 1$ (因 $|q^{-1}S_{a,q}| \leq 1$)。故总和 $\ll P^{2\delta}$ 。

5 标准化换元。现在积分是 $\int_{\beta}^{\beta + P^{-k+\delta}}$

第四步：误差项 (4.11) 的总影响。原文：(4.11) 的误差 $O(P^{s-1+2\delta})$ 在 $\int_{\beta}^{\beta + P^{-k+\delta}}$

误差项指数的完整核算

1 单个主弧上误差 $O(P^{s-1+2\delta})$ 是逐点上界, 乘以积分区间长度 $\ll P^{-k+\delta}$: $P^{s-1+2\delta} \cdot P^{-k+\delta} = P^{s-k-1+3\delta}$ 。

2 对所有主弧求和, 主弧个数 $\ll P^{2\delta}$ (上条数过): $P^{s-k-1+3\delta} \cdot P^{2\delta} = P^{s-k-1+5\delta}$ 。

3 关键是出现了 -1 (来自 $s-1$ 的那个 -1), 它代表"比主项少一个 P 的一次幂"。只要 δ 取得足够小 (使 $5\delta < 1$), 就有 $(s-k-1+5\delta) < 0$, 故误差 $\ll P^{s-k-\delta'}$ 。引理 4.3 证毕。■

小结：第三步给主项 $P^{s-k}\mathfrak{S}(P^\delta, N)J(P^\delta)$ ，第三步的换 N 误差与第四步的 s 次幂误差都 $\ll P^{s-k-\delta'}$ ，合起来就是 (4.8)。

第 9 节 奇异级数的定义与收敛（对应"定义"与其后一段）

定义. 令

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q (q^{-1}S_{a,q})^s e(-Na/q). \quad (4.12)$$

奇异级数 $\mathfrak{S}(N)$ (singular series) 是什么、为什么要它。它就是把截断版 $\mathfrak{S}(P^\delta, N)$ 里 q 的上限从 P^δ 推到 ∞ 得到的无穷级数。

- 为什么引入？引理 4.3 的主项里含 $\mathfrak{S}(P^\delta, N)$ ，但它依赖 P (随 N 变)，不是一个干净的、只跟 N 有关的量。我们希望主项写成"常数 $\times N$ 的幂 $\times$ 一个纯算术量"。把上限推到无穷得到的 $\mathfrak{S}(N)$ ，就是那个不依赖 P 的纯算术量，它只编码" k 次幂在各模 q 下的分布信息"。
- "奇异"二字 (singular) 的来历：这是 Hardy-Littlewood 的历史命名，指它来自圆周上靠近有理点 ("奇点") 的贡献之和，并非"奇怪"之意。
- 它的算术意义 (下节正文会点明、下一章详证)： $\mathfrak{S}(N)$ 等于一串"局部密度"之积，反映方程 $x_1^k + \cdots + x_s^k \equiv N \pmod{q}$ 在各 q 下有多少解。整数受同余约束，故 $\mathfrak{S}(N)$ 充当对"实数密度"的修正因子。

原文：这称为将 N 表示为 s 个正整数 k 次幂之和这一问题的奇异级数。若 $s \geq 2^k + 1$ ，则该级数绝对收敛，且关于 N 一致收敛；因为由引理 3.1 的推论我们有 (其中 $K = 2^{k-1}$)：

$$|(q^{-1}S_{a,q})^s e(-Na/q)| \ll q^{-s/K+\varepsilon} \ll q^{-2-1/K+\varepsilon}.$$

稍后我们将证明：在更宽松的条件 $s \geq 2k + 1$ 下，同样的结论也成立。

为什么这个无穷级数会收敛——逐步 无穷级数最怕"加不出有限值"。这里要证它**绝对收敛** (每项取绝对值后求和仍有限)。

- 1 单项的大小。引理 3.1 的推论给出完全和的估计 $|q^{-1}S_{a,q}| \ll q^{-1/K+\varepsilon}$ ($K = 2^{k-1}$)。取 s 次方： $|(q^{-1}S_{a,q})^s| \ll q^{-s/K+s\varepsilon}$ 。又 $|e(-Na/q)| = 1$ 不影响大小。把 $s\varepsilon$ 重新记成 ε (仍任意小)，得每项 $\ll q^{-s/K+\varepsilon}$ 。

2 代入 $s \geq 2^k + 1$ 。注意 $2^k = 2 \cdot 2^{k-1} = 2K$ ，故 $s \geq 2^k + 1 = 2K + 1$ ，于是

$$\frac{s}{K} \geq \frac{2K+1}{K} = 2 + \frac{1}{K}.$$

所以每项 $\ll q^{-s/K+\varepsilon} \leq q^{-2-1/K+\varepsilon}$ 。这正是原文那行。

3 对 a 求和。固定 q ，内层 a 至多 q 个，每个 $\ll q^{-2-1/K+\varepsilon}$ ，故内层和 $\ll q \cdot q^{-2-1/K+\varepsilon} = q^{-1-1/K+\varepsilon}$ 。

4 对 q 求和。剩下 $\sum_{q=1}^{\infty} q^{-1-1/K+\varepsilon}$ 。这是一个 p -级数 $\sum q^{-p}$ ，指数 $p = 1 + \frac{1}{K} - \varepsilon$ 。只要 $\varepsilon < \frac{1}{K}$ ，就有 $p > 1$ ， p -级数收敛（高中数学/微积分基本事实： $\sum q^{-p}$ 当 $p > 1$ 时收敛）。

5 故整个双重级数绝对收敛。又因每项上界 $q^{-2-1/K+\varepsilon}$ 与 N 无关，按 Weierstrass M-判别法，收敛关于 N 是一致的（这保证下一节可以把 $\mathfrak{S}(P^\delta, N)$ 安全换成 $\mathfrak{S}(N)$ ）。■

" $s \geq 2k + 1$ 更宽松"是什么意思？这里用 $2^k + 1$ （指数级大）保证收敛；但用更细致的论证可放宽到 $s \geq 2k + 1$ （线性级，小得多）。这是后续章节的改进，本章只需 $2^k + 1$ 。

第 10 节 主定理 4.1 及其证明

定理 4.1. 若 $s \geq 2^k + 1$ ，则将 N 表示为 s 个正整数 k 次幂之和的表示数 $r(N)$ 满足

$$r(N) = C_{k,s} N^{s/k-1} \mathfrak{S}(N) + O(N^{s/k-1-\delta'}) \quad (4.13)$$

对某个固定的 $\delta' > 0$ 成立，其中

$$C_{k,s} = \frac{\Gamma(1 + 1/k)^s}{\Gamma(s/k)} > 0. \quad (4.14)$$

先读懂这个公式在说什么 $r(N)$ （解的个数）渐近地等于三样东西相乘：

- $C_{k,s}$ ：一个只依赖 k, s 的正常数，由 Gamma 函数给出（"连续密度常数"）。
- $N^{s/k-1}$ ：主项的量级（第 1 节已猜到）。
- $\mathfrak{S}(N)$ ：奇异级数，编码同余约束的修正。

后面是误差 $O(N^{s/k-1-\delta'})$ ，比主项小一个正次幂 $N^{-\delta'}$ 。证明就是把前面所有引理拼起来，再算出 $J = C_{k,s}$ 。

证.

第一步：合并主弧与次弧。由 (4.1) 把积分拆成主弧与次弧两块，分别用引理 4.3 与 4.1:

$$\begin{aligned} r(N) &= \left\{ \int_{\mathfrak{M}} + \int_{\mathfrak{m}} \right\} (T(\alpha))^s e(-N\alpha) d\alpha \\ &= P^{s-k} \mathfrak{S}(P^\delta, N) J(P^\delta) + O(P^{s-k-\delta'}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

这一步只是"两块相加"

- 1 $[0, 1] = \mathfrak{M} \cup \mathfrak{m}$ (主弧并次弧)，且两者不交，故 $\int_0^1 = \int_{\mathfrak{M}} + \int_{\mathfrak{m}}$ 。
- 2 主弧块 $= P^{s-k} \mathfrak{S}(P^\delta, N) J(P^\delta) + O(P^{s-k-\delta'})$ (引理 4.3)。
- 3 次弧块: $\left| \int_{\mathfrak{m}} (T)^s e(-N\alpha) d\alpha \right| \leq \int_{\mathfrak{m}} |T|^s d\alpha \ll P^{s-k-\delta'}$ (引理 4.1; 用了 $|e(-N\alpha)| = 1$)，整块归入误差。
- 4 相加即 (4.15)。下面把 $\mathfrak{S}(P^\delta, N) \rightarrow \mathfrak{S}(N)$ 、 $J(P^\delta) \rightarrow J$ 、 $P \rightarrow N^{1/k}$ ，并算出 J 。

第二步：把奇异积分 $J(P^\delta)$ 的积分上限推到无穷。原文：先把内层积分用三种方式改写：

$$\int_0^1 e(\gamma \xi^k) d\xi = k^{-1} \int_0^1 \zeta^{-1+1/k} e(\gamma \zeta) d\zeta = k^{-1} \gamma^{-1/k} \int_0^\gamma \zeta^{-1+1/k} e(\zeta) d\zeta \quad (\gamma > 0).$$

这三种写法是怎么换元换出来的

- 1 第一个等号 (令 $\zeta = \xi^k$)。在 $\int_0^1 e(\gamma \xi^k) d\xi$ 中令 $\zeta = \xi^k$ ，则 $\xi = \zeta^{1/k}$ ， $d\xi = \frac{1}{k} \zeta^{1/k-1} d\zeta = \frac{1}{k} \zeta^{-1+1/k} d\zeta$ ； $\xi: 0 \rightarrow 1$ 对应 $\zeta: 0 \rightarrow 1$ 。代入：
$$\int_0^1 e(\gamma \xi^k) d\xi = \int_0^1 e(\gamma \zeta) \cdot \frac{1}{k} \zeta^{-1+1/k} d\zeta = k^{-1} \int_0^1 \zeta^{-1+1/k} e(\gamma \zeta) d\zeta.$$
- 2 第二个等号 (令 $\zeta = t/\gamma$ 把 γ 提出， $\gamma > 0$)。在上式里令 $\zeta = t/\gamma$ (即 $t = \gamma \zeta$)， $d\zeta = dt/\gamma$ ， $\zeta: 0 \rightarrow 1$ 对应 $t: 0 \rightarrow \gamma$ ：

$$k^{-1} \int_0^1 \zeta^{-1+1/k} e(\gamma \zeta) d\zeta = k^{-1} \int_0^\gamma \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{-1+1/k} e(t) \frac{dt}{\gamma} = k^{-1} \gamma^{-1/k} \int_0^\gamma t^{-1+1/k} e(t) dt$$

其中把 $\gamma^{1-1/k} \cdot \gamma^{-1} = \gamma^{-1/k}$ 提出。换回字母 ζ 即原文第三式。

为什么要这三种写法？ 第一式把" k 次幂"展平成幂函数权 $\zeta^{-1+1/k}$ ，方便最后接 Beta 积分；第三式把上限变成 γ 、把 γ 的幂 $\gamma^{-1/k}$ 显式提出，正好用来估计内层积分随 γ 的衰减——这就是下面"扩展到无穷"的依据。

为什么内层积分 $\ll |\gamma|^{-1/k}$ ，从而能扩到无穷

1 看第三式 $k^{-1} \gamma^{-1/k} \int_0^\gamma \zeta^{-1+1/k} e(\zeta) d\zeta$ 。要证 $\int_0^\gamma \zeta^{-1+1/k} e(\zeta) d\zeta$ 是 γ 的有界函数（不随 $\gamma \rightarrow \infty$ 爆掉）。

2 在 0 附近：被积 $\zeta^{-1+1/k}$ 的指数 $-1 + 1/k > -1$ （因 $k \geq 2 \Rightarrow 1/k > 0$ ），而 $\int_0^\gamma \zeta^{-1+1/k} d\zeta$ 在 0 处收敛（ p -积分判据：指数 > -1 则可积）。故积分在 0 处**绝对收敛**，没问题。

3 在 ∞ 方向： $e(\zeta) = e^{2\pi i \zeta}$ 是**振荡**的，配合单调衰减权 $\zeta^{-1+1/k}$ （递减趋 0），由 **Dirichlet 收敛判别法**（振荡有界 $\times$ 单调趋零 $\Rightarrow$ 积分收敛）， $\int_0^\gamma$ 当 $\gamma \rightarrow \infty$ 收敛，故对一切 γ 一致有界。

4 因此 $|\int_0^1 e(\gamma \xi^k) d\xi| = k^{-1} |\gamma|^{-1/k} |\int_0^\gamma \dots| \ll |\gamma|^{-1/k}$ 。即内层积分随 $|\gamma|$ 以 $|\gamma|^{-1/k}$ 衰减。

5 **扩到无穷的误差**。把 $J(P^\delta)$ ($(|\gamma|P^\delta)$) 部分：被积 $|\int_0^1 e(\gamma \xi^k) d\xi|^s \ll |\gamma|^{-s/k}$ ，故尾巴 $\ll \int_{P^\delta}^\infty \gamma^{-s/k} d\gamma$ 。因 $s \geq 2^k + 1 > k$ （实际 $s/k > 1$ ），积分收敛且等于 $\frac{(P^\delta)^{1-s/k}}{s/k - 1} \ll P^{-(s/k-1)\delta}$ 。于是

$$J(P^\delta) = J + O(P^{-(s/k-1)\delta}),$$

其中

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \left(k^{-1} \int_0^1 \zeta^{-1+1/k} e(\gamma \zeta) d\zeta \right)^s e(-\gamma) d\gamma. \quad (4.16)$$

奇异积分 J (singular integral) 是什么、为什么要它。 J 是把 $J(P^\delta)$ 的上限推到 $\pm\infty$ 得到的、只依赖 k, s (不依赖 N, P) 的纯数。它是奇异级数的"连续版对偶": 奇异级数 $\mathfrak{S}(N)$ 编码算术(整数、同余)的贡献, 奇异积分 J 编码分析(实数、连续)的贡献。下面将证明

$$J = C_{k,s} = \frac{\Gamma(1 + 1/k)^s}{\Gamma(s/k)}, \text{ 它就是 (4.13) 里那个连续密度常数。}$$

第三步: 替换并得到 (4.13) (暂缺 $J = C_{k,s}$)。由 $\mathfrak{S}(N)$ 的绝对(且一致)收敛, 可把 (4.15) 里 $\mathfrak{S}(P^\delta, N)$ 换成 $\mathfrak{S}(N)$; 由刚证的 $J(P^\delta) = J + O(\dots)$ 把 $J(P^\delta)$ 换成 J ; 再把 P 换成 $N^{1/k}$ 。所有替换误差都可忽略, 得

$$r(N) = J \cdot N^{s/k-1} \mathfrak{S}(N) + O(N^{s/k-1-\delta'}).$$

只差证明 $J = C_{k,s}$ 。原文强调: " J 的确切值或许并不重要, 但我们需要知道 $J > 0$ 。"

这三处替换为什么误差可忽略

1 $\mathfrak{S}(P^\delta, N) \rightarrow \mathfrak{S}(N)$: 两者之差是 $q > P^\delta$ 的尾巴, 由第 9 节每项 $\ll q^{-2-1/K+\varepsilon}$, 尾和 $\ll \sum_{q>P^\delta} q^{-1-1/K+\varepsilon} \ll (P^\delta)^{-1/K+\varepsilon} = P^{-\delta/K+\varepsilon\delta}$, 是 P 的负次幂, 乘上主项 $P^{s-k}J$ 后并入误差。

2 $J(P^\delta) \rightarrow J$: 差 $O(P^{-(s/k-1)\delta})$ (上一框已证), 同样是负次幂, 乘主项后并入误差。

3 $P \rightarrow N^{1/k}$: 因 $P^k \leq N < (P+1)^k$, $P = N^{1/k}(1 + O(N^{-1/k} \dots))$, 把 P^{s-k} 换成 $N^{(s-k)/k} = N^{s/k-1}$ 的相对误差是 N 的负次幂, 也可忽略。

三处替换都把"依赖 P 的截断量"换成"只依赖 N 或只依赖 k, s 的干净量", 代价都是更高阶的小误差。于是公式 (4.13) 的形状到手, 只剩常数 J 。

第 11 节 求出奇异积分 $J = C_{k,s}$ (对应"为求出 J ……"那几段)

这几段在讲什么: 用 Fourier 积分定理把 J 算成一个 Dirichlet/Beta 型多重积分, 得到漂亮的 Gamma 函数闭式, 并验证定理可用(有界变差)。

第一步: 写出 $k^s J$ 的多重积分形式。原文从

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e(\mu\gamma) d\gamma = \frac{\sin 2\pi\lambda\mu}{\pi\mu}$$

出发，得到

$$k^s J = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 (\zeta_1 \cdots \zeta_s)^{-1+1/k} \frac{\sin 2\pi\lambda(\zeta_1 + \cdots + \zeta_s - 1)}{\pi(\zeta_1 + \cdots + \zeta_s - 1)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_s.$$

这一大步逐项拆解

1 先证那条 sin 公式。

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e(\mu\gamma) d\gamma = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{2\pi i \mu \gamma} d\gamma = \left[\frac{e^{2\pi i \mu \gamma}}{2\pi i \mu} \right]_{-\lambda}^{\lambda} = \frac{e^{2\pi i \mu \lambda} - e^{-2\pi i \mu \lambda}}{2\pi i \mu} = \frac{2i \sin 2\pi \mu \lambda}{2\pi i \mu} = \frac{\sin 2\pi \lambda}{\pi \mu},$$

，用了 $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$ 。

2 把 J 的 γ -积分截断成 $[-\lambda, \lambda]$ ，取极限。由 (4.16)，

$J = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} (\text{内层})^s e(-\gamma) d\gamma$ 。把内层 $k^{-1} \int_0^1 \zeta^{-1+1/k} e(\gamma \zeta) d\zeta$ 的 s 次方展开成 s 重积分（变量 $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ ），并提出 k^{-s} （故左边写 $k^s J$ ）：

$$k^s J = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 (\zeta_1 \cdots \zeta_s)^{-1+1/k} e(\gamma(\zeta_1 + \cdots + \zeta_s)) d\vec{\zeta} \right) e(-\gamma) d\gamma.$$

3 交换积分次序，先积 γ 。把对 γ 的积分挪到最里层，合并指数

$e(\gamma(\zeta_1 + \cdots + \zeta_s)) e(-\gamma) = e(\gamma(\zeta_1 + \cdots + \zeta_s - 1))$ 。令

$\mu = \zeta_1 + \cdots + \zeta_s - 1$ ，用第 1 条的 sin 公式： $\int_{-\lambda}^{\lambda} e(\mu\gamma) d\gamma = \frac{\sin 2\pi\lambda\mu}{\pi\mu}$ 。代

回即原文式子。

直觉：那个 $\frac{\sin 2\pi\lambda\mu}{\pi\mu}$ 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 是一个越来越高、越来越窄、集中在 $\mu = 0$ （即 $\zeta_1 + \cdots + \zeta_s = 1$ ）的"尖峰"（Dirichlet 核）。它的作用和正交关系（★）一模一样——把 s 个变量之和"卡"在 $= 1$ 的那张超平面上。

第二步：换变量 $u = \zeta_1 + \cdots + \zeta_s$ ，引入 $\phi(u)$ 。原文把 ζ_s 换成 u ：

$$k^s J = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^s \phi(u) \frac{\sin 2\pi\lambda(u-1)}{\pi(u-1)} du,$$

其中

$$\phi(u) = \int \cdots \int \{ \zeta_1 \cdots \zeta_{s-1} (u - \zeta_1 - \cdots - \zeta_{s-1}) \}^{-1+1/k} d\zeta_1 \cdots d\zeta_{s-1},$$

积分取遍 $\{u-1 < \zeta_1 + \cdots + \zeta_{s-1}\}$

$\phi(u)$ 是什么、为什么积分上限是 s

1 **动机：**上式的核 $\frac{\sin 2\pi\lambda(u-1)}{\pi(u-1)}$ 只依赖 $u = \zeta_1 + \cdots + \zeta_s$ ，所以应先把"固定 u 那张超平面上的积分"做掉，再对 u 积。 $\phi(u)$ 就是固定 $\zeta_1 + \cdots + \zeta_s = u$ 时被积函数 $(\zeta_1 \cdots \zeta_s)^{-1+1/k}$ 在那张超平面上的积分（一个截面积分）。

2 **怎么换的：**把 ζ_s 用 u 表示， $\zeta_s = u - (\zeta_1 + \cdots + \zeta_{s-1})$ 。于是 $(\zeta_1 \cdots \zeta_s)^{-1+1/k} = \{\zeta_1 \cdots \zeta_{s-1} \cdot (u - \zeta_1 - \cdots - \zeta_{s-1})\}^{-1+1/k}$ ，对前 $s-1$ 个变量积分即 $\phi(u)$ 。约束 $0 < \zeta_s < 1$ 翻译成 $(u-1 < \zeta_1 + \cdots + \zeta_{s-1})$

3 **为什么 u 从 0 到 s ？** 每个 $\zeta_i \in (0, 1)$ ，故和 $u = \zeta_1 + \cdots + \zeta_s$ 介于 0 与 s 之间。所以外层 $\int_0^s$ 。

第三步：Fourier 积分定理取出 $\phi(1)$ 。原文回忆有限区间上的 Fourier 积分定理：在一定条件下
$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_A^B \phi(u) \frac{\sin 2\pi\lambda(u-C)}{\pi(u-C)} du = \phi(C), \quad A < C < B$$

Fourier 积分定理在直觉上做了什么

1 核 $\frac{\sin 2\pi\lambda(u-C)}{\pi(u-C)}$ 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 是一个集中在 $u = C$ 的"采样尖峰"，且它在整条线上的积分恒为 1。所以拿它去乘任何（足够规则的）函数 $\phi(u)$ 再积分，效果就是读出 ϕ 在 $u = C$ 处的值 $\phi(C)$ 。这是 (★) 正交关系的连续模拟（Dirichlet 核 $\rightarrow$ 单点采样）。

2 这里 $C = 1$ ，正好对应原方程" s 个 k 次幂之和 = 1（标准化后）"那张超平面。于是 $k^s J = \phi(1)$ ：把和恰为 1 的那张超平面上的截面积分取出来。

3 **为什么把 N 标准化成 1？** 前面换元 $\xi = P\xi'$ 把 $x_i \leq P$ 缩成 $\xi'_i \leq 1$ ，把 N 缩成 1。所以"和 = N "变成"和 = 1"。 $\phi(1)$ 正是这个连续化、标准化后的"超平面截面体积"。

第四步：用 Dirichlet（Euler Beta 的推广）积分算出 $\phi(1)$ 。原文指出最后这个 $s-1$ 重积分是 Dirichlet 求出的一类积分，是 Euler 积分

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

的直接推广，结果

$$\phi(1) = \frac{\Gamma(1/k)^s}{\Gamma(s/k)}, \quad \text{从而} \quad J = \left(\frac{1}{k}\right)^s \frac{\Gamma(1/k)^s}{\Gamma(s/k)} = \frac{\Gamma(1 + 1/k)^s}{\Gamma(s/k)}.$$

Beta、Gamma 与 Dirichlet 积分——从零讲清这一步

- 1 **Gamma 函数** Γ : $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$, 对正整数 $\Gamma(n) = (n-1)!$, 且 $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ 。它是“阶乘的连续版”。

- 2 **Beta 函数** $B(p, q)$: $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ 。这是 $s=2$ (一个内变量) 时的本步特例。

- 3 **Dirichlet 推广 (多变量 Beta)**: 对单纯形 $\{t_i > 0, \sum t_i < 1\}$,

$$\int \cdots \int t_1^{p_1-1} \cdots t_n^{p_n-1} \left(1 - \sum t_i\right)^{p_{n+1}-1} d\vec{t} = \frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_{n+1})}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_{n+1})}.$$

- 4 **套用**。本步积分是 $n = s-1$ 个变量 $\zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}$ 在 $\sum \zeta_i < 1$ 上, 被积 $\{\zeta_1 \cdots \zeta_{s-1} (1 - \sum \zeta_i)\}^{-1+1/k}$ 。对照公式: 每个 $p_i - 1 = -1 + 1/k$, 即 $p_i = 1/k$, 共 s 个这样的指数 (前 $s-1$ 个变量加上 $1 - \sum$ 那项, 合计 s 个)。所以

$$\phi(1) = \frac{\Gamma(1/k)^s}{\Gamma(s \cdot 1/k)} = \frac{\Gamma(1/k)^s}{\Gamma(s/k)}.$$

- 5 **得 J** 。 $k^s J = \phi(1) \Rightarrow J = k^{-s} \frac{\Gamma(1/k)^s}{\Gamma(s/k)} = \frac{(k^{-1}\Gamma(1/k))^s}{\Gamma(s/k)}$ 。再用 $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ 于 $t = 1/k$: $\Gamma(1 + 1/k) = \frac{1}{k}\Gamma(1/k)$, 即 $k^{-1}\Gamma(1/k) = \Gamma(1 + 1/k)$ 。代入:

$$J = \frac{\Gamma(1 + 1/k)^s}{\Gamma(s/k)} = C_{k,s}.$$

这正是 (4.14)。且因 Gamma 在正实轴恒正, $C_{k,s} > 0$, 故 $J > 0$ ——这是我们真正需要的 (保证主项不为零, N 确实有大量表示)。■

第五步: 验证 Fourier 积分定理可用 (ϕ 有界变差)。原文: 充分条件是 $\phi(u)$ 有界变差。令 $\zeta_j = ut_j$, 则

$$\phi(u) = u^{s/k-1} \int_0^{1/u} \cdots \int_0^{1/u} \{t_1 \cdots t_{s-1} (1 - t_1 - \cdots - t_{s-1})\}^{-1+1/k} dt_1 \cdots dt_{s-1},$$

积分取遍 $\setminus \{1-1/u\}$

"有界变差"是什么、为什么这步成立

1 **有界变差 (bounded variation)**: 粗略说, 一个函数若"上上下下波动的总幅度有限" (不会无限次剧烈抖动), 就叫有界变差。**单调函数** (一路增或一路减) 自动有界变差; 两个有界变差函数之积仍有界变差。这正是 Fourier 积分定理"采样出 $\phi(C)$ "所需的规则性。

2 **换元 $\zeta_j = ut_j$ 的效果**。每个 ζ_j 缩放 u 倍变成 t_j 。被积 $\{\zeta_1 \cdots \zeta_{s-1} (u - \sum \zeta_i)\}^{-1+1/k}$ 中, 每个因子提出一个 u : 共 s 个因子 ($s-1$ 个 ζ 加 $(u - \sum)$), 每个贡献 $u^{-1+1/k}$, 合计 $u^{s(-1+1/k)} = u^{-s+s/k}$; 又 $d\zeta_1 \cdots d\zeta_{s-1} = u^{s-1} dt_1 \cdots dt_{s-1}$ 。两者相乘的 u 幂: $u^{-s+s/k} \cdot u^{s-1} = u^{s/k-1}$ 。这就是提出的 $u^{s/k-1}$ 。

3 **剩下的积分是 u 的单调递减函数**。换元后被积函数完全不含 u , u 只出现在积分上限/区域 $1 - 1/u < \sum t_i < 1, t_j < 1/u$ 里。当 u 增大, $1/u$ 减小, 积分区域收缩, 正被积函数在更小区域上积分只会更小——故该积分是 u 的正、单调递减函数。

4 于是 $\phi(u) = u^{s/k-1} \times (\text{正单减函数})$ 。 $u^{s/k-1}$ 是幂函数 (单调, 有界变差), 单减函数也有界变差, 乘积有界变差。定理前提满足, 第三步合法。■

第 12 节 注记：方法的来源与替代 (对应"注记"段)

原文：在我们对奇异积分的处理中，我们遵循了 Landau 的一篇论文 [54]。关于更为一般的处理，参见 Kestelman 的一篇论文 [52]。有若干手段可以避免使用 Fourier 积分定理；例如，可以把 $I(\beta)$ 换成有限和

$$k^{-1} \sum_{0 < m < P^k} m^{-1+1/k} e(\beta m),$$

或者也可以像 Vinogradov [93, 第 3 章] 那样间接地求出 J 。但总的来说，引用 Fourier 积分定理似乎是自然而恰当的。

历史与方法取舍

- **人物与脉络：**Waring 问题源自 1770 年 E. Waring 的断言"每个正整数都是不超过若干个 k 次幂之和"。Hilbert 在 1909 年证明了"个数有限"的存在性，但没有渐近计数。真正给出**渐近公式**的是 Hardy 与 Littlewood 在 1920 年代用**圆法**完成的系列工作；本章正是这套方法的现代精简版。Landau、Kestelman 关于奇异积分的处理，Vinogradov 对次弧估计（Weyl 和）的革命性改进，都是这条线上的关键节点。
- **为什么这项工作重要：**它第一次把"有多少种表示"这种**定量**问题，从纯组合/同余的死胡同里解放出来，变成可计算的解析问题（积分 + 级数），并清晰地分离出"连续密度" $C_{k,s}N^{s/k-1}$ 与"算术修正" $\mathfrak{S}(N)$ 两种独立机制。这一"主项 = 奇异积分 $\times$ 奇异级数"的范式，后来成为整个解析数论（圆法）的标准模板。
- **避免 Fourier 积分定理的替代：**(1) 把连续积分 $I(\beta)$ 换回离散和 $k^{-1} \sum_m m^{-1+1/k} e(\beta m)$ ，用初等求和处理；(2) Vinogradov 用间接方式定出 J 。Davenport 选择直接引用 Fourier 积分定理，理由是它"自然而恰当"——概念上最透明，代价是要核验有界变差（第 11 节第五步已做）。这是一处典型的**方法取舍**：透明性 vs. 自足性。

第 13 节 渐近公式的意义：密度 $\times$ 修正（对应最后一段）

原文：在渐近公式 (4.13) 中，可以把第一个因子 $C_{k,s}N^{s/k-1}$ 看作度量了方程 $x_1^k + \cdots + x_s^k = N$ ($x_i > 0$) 在实数中解的"密度"；它是某超曲面这一部分的 $(s-1)$ 维测度。换一种说法，它（在可忽略的误差范围内）是区域 $[N^{1/k}, \dots, N^{1/k}]$ 的 s 维体积。

为什么 $C_{k,s}N^{s/k-1}$ 就是那个"体积/密度"

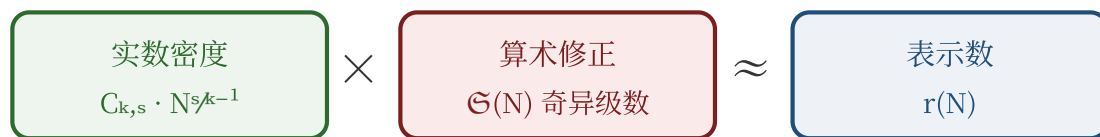
- 1 考虑 s 维空间中"薄壳" $[N^{1/k}, N^{1/k} + \delta]$ 实数解去近似整点解"的连续模型——把每个整点 $(x_1, \dots, x_s)$ 想成单位体积的小盒子，薄壳的体积 $\approx$ 落在其中的整点数。
- 2 而这个体积可由超曲面 $\sum x_i^k = N$ 的 $(s-1)$ 维面积乘以薄壳厚度（沿法向 ≈ 1 ）得到，故称" $(s-1)$ 维测度"。
- 3 用第 11 节标准化的语言：把 $x_i = N^{1/k} t_i$ 缩放，体积里提出 $N^{s/k}$ (s 个变量各 $N^{1/k}$)，薄壳厚度 1 相对缩成 $N^{-1/k}$ ，净得 $N^{s/k-1}$ 量级；前面的比例常数经

第 11 节算得正是 $C_{k,s} = \Gamma(1 + 1/k)^s / \Gamma(s/k)$ (这就是奇异积分 J 的几何身份)。所以 $C_{k,s} N^{s/k-1}$ = 薄壳体积 = 实数解密度。

原文：第二个因子 $\mathfrak{S}(N)$ 可以看作一个补偿因子，用以反映这样一个事实：整数的 k 次幂并不像实数的 k 次幂那样均匀分布，因为前者受到同余限制的约束。（ $\mathfrak{S}(N)$ 与同余之间的关系将在下一节中浮现。）于是，渐近公式的结论用略嫌含糊的话说就是：把一个大数表示为 s 个正整数 k 次幂之和的表示数，渐近地由这两种影响所主导，前提是 s 大于 k 的某个函数。

为什么需要"补偿因子" $\mathfrak{S}(N)$ ——一个具体例子

- 1 "实数密度" $C_{k,s} N^{s/k-1}$ 默认 k 次幂在数轴上均匀铺开。但整数的 k 次幂不均匀：它们受同余约束。例如 $k = 2$ 时，平方数模 4 只能是 0 或 1，绝不会是 2, 3。
- 2 于是若 N 落在某些剩余类里，可表示性会被增强或削弱。 $\mathfrak{S}(N)$ 正是把"对每个模 q 的解数相对均匀情形的偏差"全部乘起来的修正： $\mathfrak{S}(N) > 1$ 表示比均匀情形更易表示， < 1 表示更难， $= 0$ 表示根本无解（局部障碍）。
- 3 这就是为什么 $r(N) = (\text{实数密度}) \times (\text{算术修正})$ 。两个因子分别来自圆法的两半：奇异积分 $J = C_{k,s}$ （分析/连续）与奇异级数 $\mathfrak{S}(N)$ （算术/离散）。 $\mathfrak{S}(N)$ 与同余的精确关系（写成各素数处"局部密度"之积）将在下一章展开。
- 4 "s 大于 k 的某个函数"：本章要求 $s \geq 2^k + 1$ 才让所有估计成立；这是渐近公式成立的代价——项数要足够多，主项才稳稳压过误差。后续工作把这个门槛从指数级 2^k 一路降到线性级。



来自奇异积分 J （连续/分析）

来自完全和 $S_{k,m}$ （同余/算术）

圆法的核心范式：主项 = 奇异积分 $\times$ 奇异级数

本章的最终图景：解的个数 $r(N)$ 渐近地等于"实数密度"与"算术修正"之积，分别由奇异积分与奇异级数给出。

全章脉络一句话回顾 (4.1) 把计数变积分 $\rightarrow$ 第 2/3 节定主弧次弧战略 $\rightarrow$ 引理 4.1 用 Dirichlet 逼近 + Weyl 估计 + Hua 不等式把次弧压进误差 $\rightarrow$ 引理 4.2 在主弧上把 T 拆成算术因子 $q^{-1}S_{a,q} \times$ 分析因子 $I(\beta) \rightarrow$ 引理 4.3 整段主弧积分 $= P^{s-k}\mathfrak{S}(P^\delta, N)J(P^\delta) \rightarrow$ 定理 4.1 推极限、算 $J = C_{k,s}$, 得渐近公式 $r(N) = C_{k,s}N^{s/k-1}\mathfrak{S}(N) + \text{小误差}$ 。两大主角奇异级数 $\mathfrak{S}(N)$ (算术) 与奇异积分 J (分析) 就是答案的两半。

返回 [全书目录](#)