

DAVENPORT · 圆法 · 高中详解版

三次型：劣弧与优弧

Cubic forms: minor arcs and major arcs

本章要解决什么 我们想数清楚：一个固定的三次型 $C(x_1, \dots, x_n)$ （即每一项都是三次的多项式，例如 $x_1^3 + x_2^3 - x_3^3$ ），在一个边长正比于 P 的大盒子里，有多少组整数点 $\mathbf{x}$ 使得 $C(\mathbf{x}) = 0$ 。圆法（Hardy-Littlewood circle method）把这个“解的个数”写成一个 $[0, 1]$ 上的积分 $\mathcal{N}(P) = \int_0^1 S(\alpha) d\alpha$ 。本章做两件事：(1) 把积分区间 $[0, 1]$ 切成两类——靠近“简单分数” a/q 的一小撮短区间叫**优弧** $\mathfrak{M}$ ，其余全部叫**劣弧** $\mathfrak{m}$ ；(2) 证明劣弧上的积分很小（可以忽略，引理 15.1），而优弧上的积分能被算成一个干净的乘积 $P^{n-3} \mathfrak{S} J$ （引理 15.2–15.4），其中 $\mathfrak{S}$ 是**奇异级数**、 J 是**奇异积分**。读完你会明白：为什么要这样切、每一处放缩到底放了多少、那些“显然”的跳步具体是怎么补的。

阅读提示：本页把第 15 章的**每一段译文**都摊开来讲。凡是原文写“显然”“容易看出”或直接跳步的地方，我都补成一条一条的完整推导。凡超出高中范围的符号（复指数、积分挑选、求和号、同余、 O 与 $\ll$ 、欧拉函数、测度……）第一次出现时都从零讲起。

第 0 节 读这一章前，必须先认识的几个“老朋友”

第 15 章在书里是承上启下的一章，它张口就用 $S(\alpha)$ 、 $\mathcal{N}(P)$ 、引理 13.4、第 4 章、第 13 章的盒子……这些都是前面章节定义好的。为了让只有高中基础的你也

能独立读懂本章，下面先把这些"老朋友"逐个请出来介绍一遍。已经熟悉的同学可以快速略过。

0.1 复指数 $e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}$ ：圆法的"心脏"

记号 $e(\alpha)$ 读作"e 括号 alpha"，是 $e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha}$ 的简写。这里 i 是虚数单位 ($i^2 = -1$)， $\pi = 3.14159\dots$ ， α 是一个实数。

高中阶段你学过复数 $a + bi$ ，也学过它在复平面上是一个点。欧拉公式（大学才系统学，但结论可以先用）告诉我们

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta.$$

把 $\vartheta = 2\pi\alpha$ 代进去，就得到

$$e(\alpha) = e^{2\pi i\alpha} = \cos(2\pi\alpha) + i \sin(2\pi\alpha).$$

它有三条关键性质，本章反复要用：

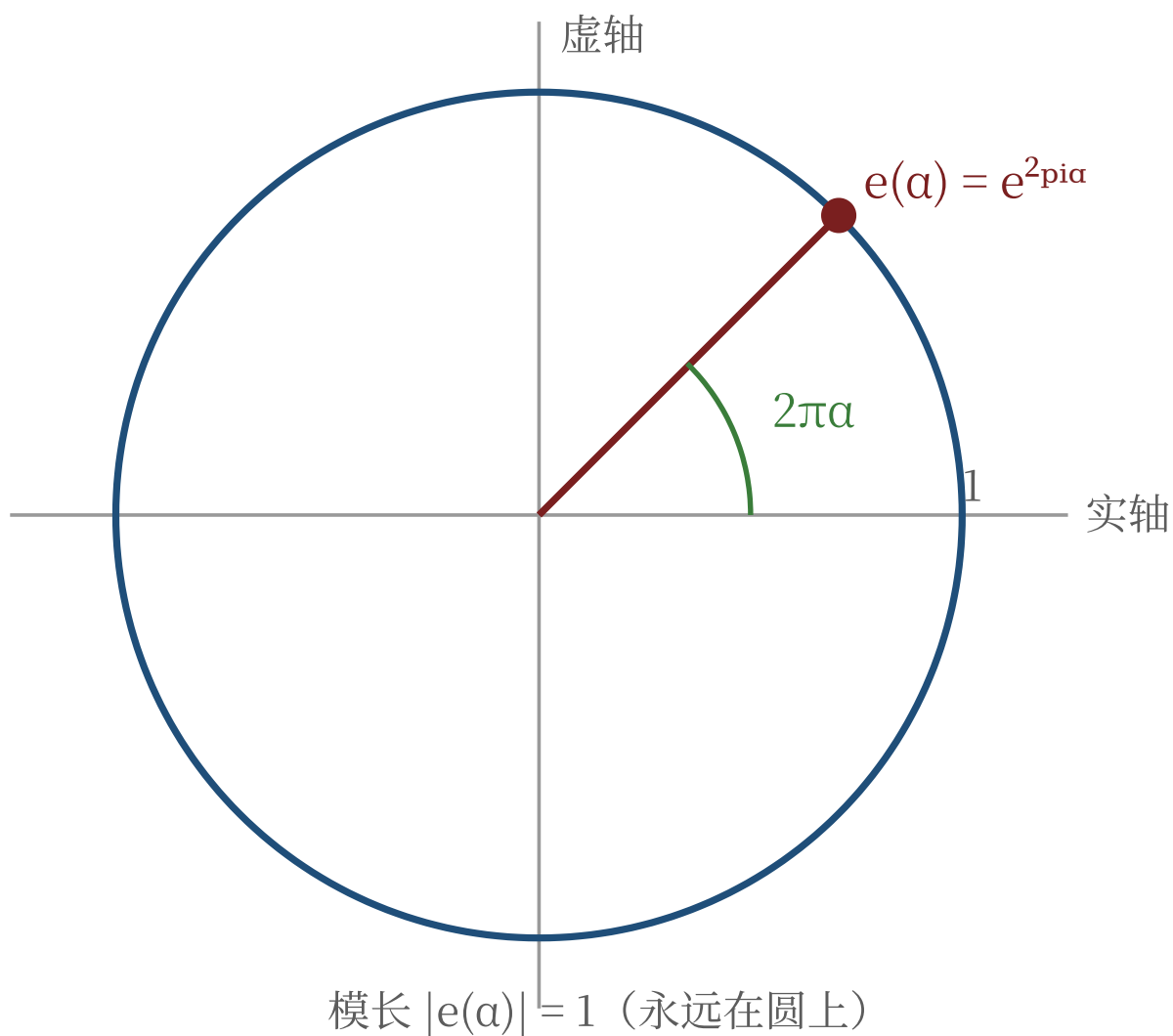
1 模长恒为 1：因为 $\cos^2 + \sin^2 = 1$ ，所以

$|e(\alpha)| = \sqrt{\cos^2(2\pi\alpha) + \sin^2(2\pi\alpha)} = 1$ 。也就是说，无论 α 取什么实数， $e(\alpha)$ 都落在复平面的**单位圆**上。这正是"圆法"名字的来源。

2 周期为 1： $e(\alpha + 1) = e^{2\pi i(\alpha+1)} = e^{2\pi i\alpha} \cdot e^{2\pi i} = e(\alpha)$ ，因为

$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ 。所以 α 走一圈（加 1）就回到原处——区间 $[0, 1]$ 正好对应单位圆转一整圈。

3 把整数变成 1：若 m 是整数，则 $e(m) = e^{2\pi im} = 1$ 。这条性质是下面"积分挑零点"的关键。



实数 α 决定单位圆上转过的角度 $2\pi\alpha$ 。 α 从 0 增到 1，点 $e(\alpha)$ 在单位圆上正好转一整圈回到 1。

0.2 求和号 $\sum$ 与生成函数 $S(\alpha)$

记号 $\sum_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ 表示"把 $f(\mathbf{x})$ 在所有允许的 $\mathbf{x}$ 上加起来"。这里粗体

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个 n 维整向量，相当于 n 个整数坐标打包成一个点。

圆法的核心对象是下面这个和（书中第 13 章定义，本章直接用）：

$$S(\alpha) = \sum_{\mathbf{x} \in P\mathfrak{B}} e(\alpha C(\mathbf{x})).$$

逐块翻译它：

$C(\mathbf{x})$

一个固定的**三次型**，即关于 $x_1, \dots, x_n$ 的齐三次多项式（每一项次数恰为 3，如 $x_1^3 - 2x_2^2x_3$ ）。"齐次三次"意味着 $C(t\mathbf{x}) = t^3C(\mathbf{x})$ ——所有变量同时放大 t 倍，函数值放大 t^3 倍。这条**齐次性**在本章末尾极其关键，记住它。

$\mathfrak{B}$

一个固定的**盒子**（ n 维区域，例如 $0 \leq \xi_j < 1$ 这种单位立方体，或别的有界凸区域）。它规定了我们"在哪一块范围里数点"。

P

一个很大的正实数，是我们的**放大倍数**。 $P\mathfrak{B}$ 表示把盒子 $\mathfrak{B}$ 各方向放大 P 倍后的大盒子。 $P \rightarrow \infty$ 就是"盒子越来越大"。

$\mathbf{x} \in P\mathfrak{B}$

求和范围：取遍大盒子 $P\mathfrak{B}$ 里所有**整点**（坐标全是整数的点）。这样的整点大约有 P^n 个（体积量级）。

把一串和写成关于 α 的函数 $S(\alpha)$ ，这种"用一个辅助变量打包一堆信息"的做法叫**生成函数**。它的好处下一节立刻显现。

0.3 积分 $\int_0^1$ 怎样"挑出" $C(\mathbf{x}) = 0$ 的解

记号 $\int_0^1 g(\alpha) d\alpha$ 是定积分，几何上是 g 在 $[0, 1]$ 上"曲线下的面积"（复值函数就实部虚部分别积分）。本章它扮演一个"筛子"。

关键的正交关系：对任意整数 m ,

$$\int_0^1 e(m\alpha) d\alpha = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

为什么？把它当高中可验证的小计算补全：

1 若 $m = 0$ ：被积函数 $e(0) = 1$ ，于是 $\int_0^1 1 d\alpha = 1$ 。

2 若 $m \neq 0$ ： $e(m\alpha) = \cos(2\pi m\alpha) + i \sin(2\pi m\alpha)$ 。在一个完整周期 $[0, 1]$ 上， $\cos(2\pi m\alpha)$ 和 $\sin(2\pi m\alpha)$ 恰好走过 $|m|$ 个整周期，正负相消，积分都是 0。（用原函数算也行：
 $\int_0^1 e(m\alpha) d\alpha = \frac{e(m) - e(0)}{2\pi i m} = \frac{1-1}{2\pi i m} = 0$ ，这里用到 0.1 的性质 3：
 $e(m) = 1$ 。）

于是把 $S(\alpha) = \sum_{\mathbf{x}} e(\alpha C(\mathbf{x}))$ 直接在 $[0, 1]$ 上积分：

$$\mathcal{N}(P) = \int_0^1 S(\alpha) d\alpha = \sum_{\mathbf{x} \in P\mathfrak{B}} \int_0^1 e(\alpha C(\mathbf{x})) d\alpha = \sum_{\substack{\mathbf{x} \in P\mathfrak{B} \\ C(\mathbf{x})=0}} 1.$$

1 把积分和求和交换次序（有限和，合法）。

2 对每个 $\mathbf{x}$ ， $C(\mathbf{x})$ 是个整数 m 。由正交关系，只有当 $C(\mathbf{x}) = 0$ 时 $\int_0^1 e(\alpha C(\mathbf{x})) d\alpha = 1$ ，否则为 0。

3 所以这一积分把 " $C(\mathbf{x}) \neq 0$ 的点" 全部记 0、" $C(\mathbf{x}) = 0$ 的点" 各记 1，加起来正好是方程 $C(\mathbf{x}) = 0$ 在大盒子里的整数解个数。

这就是圆法的总纲领：把"数解"变成"算一个积分"。本章的全部工作，都是为了把这个积分 $\int_0^1 S(\alpha) d\alpha$ 估出来。 $\mathcal{N}(P)$ 中的字母 $\mathcal{N}$ 取自 number（个数）。

0.4 两个量级记号： $O(\cdot)$ 与 $\ll$

记号 写 $f = O(g)$ (读"f 是大 O g") 或等价地 $f \ll g$ (读"f 远小于等于 g", Vinogradov 记号), 意思是: 存在一个与 P 无关的常数 $c > 0$, 使得对所有足够大的 P 都有 $|f| \leq c|g|$ 。

翻成人话: $f \ll g$ 就是" f 的大小被 g 控制住, 至多差一个固定倍数"。我们不关心那个常数 c 到底是 3 还是 100, 只关心随 P 增大时谁涨得快。例如 $5P^2 + 7P \ll P^2$, 因为当 P 大时 $5P^2 + 7P \leq 12P^2$ 。本章满纸都是 $\ll$, 因为我们要的从来不是精确值, 而是"主项 $>$ 误差上界"这场赛跑的胜负。

记号 ε (epsilon) 在解析数论里专指"一个可以任意小的正数"。出现 P^ε 表示"比任何 P 的正幂都慢的增长" (如 $\log P$ 这类), 写成 P^ε 是为了把它统一地塞进幂次记号里方便比较。每次出现的 ε 可以不一样, 但都任意小。

0.5 有理逼近、最大公约数 (a, q) 与"靠近分数"

记号 (a, q) 指整数 a 与 q 的最大公约数。 $(a, q) = 1$ 表示 a, q 互素 (除 1 外无公因子), 此时分数 a/q 是最简分数。

" α 有满足某条件的有理逼近 a/q "的意思是: 能找到最简分数 a/q , 使 α 离 a/q 很近。一个基础事实 (狄利克雷逼近定理, 本章引理 15.1 的证明里用到其特例) 是: 任何实数都能被分母不太大的分数逼近到一定精度。具体地, 对任意实数 α 和任意 $Q \geq 1$, 都存在 $1 \leq q \leq Q$ 和整数 a 使 $|q\alpha - a| \leq 1/Q$ 。这是后面"每个 α 最终都落进某个 $\xi(\theta)$ "的根据。

第 1 节 从引理 13.4 出发: 每个 α 非"小"即"靠近分数"

下面进入正文, 按译文段落顺序逐段讲。先抄出该段在说什么, 再展开补全。

译文·第1段 "从现在起，我们可以假设引理 13.4 的备选 B 成立。于是，对任意 α ，要么 $|S(\alpha)|$

这一段在讲什么：它引用前一章（第 13 章）证好的一个"二选一"定理，作为本章一切论证的起点。我们先解释这个"备选 B"是什么、它为什么有用。

第 13 章用 Weyl 型方法证明了关于 $S(\alpha)$ 的一条二分律（引理 13.4）。它说：固定一个参数 θ （一个介于 0 和 1 之间的小正数，用来调节"标准"的松紧），那么对每一个实数 α ，下面两种情形至少有一种成立：

备选 A（即不等式 (15.1)）

指数和很小： $|S(\alpha)|$ 比"满值 P^n "小了一个因子 $P^{-\frac{1}{4}n\theta+\varepsilon}$ 的上界。 θ 越大，这个节省越多，"小"得越厉害。

备选 B

α "几乎是一个简单分数"：它属于集合 $\xi(\theta)$ ，即存在最简分数 a/q 满足 (15.2)（下面马上讲）。

为什么这条二分律是圆法的发动机 $|S(\alpha)|$ 在 α 是简单分数附近会"共振"变得很大（许多项的相位 $\alpha C(\mathbf{x})$ 接近整数、 $e(\cdot) \approx 1$ 、同向叠加）；而在"乱七八糟"的 α 处，各项相位杂乱、互相抵消， $|S(\alpha)|$ 就小。二分律把这个直觉**精确化**为一个定理：要么你确实小（备选 A），要么你必然靠着某个分数（备选 B）。这正是"切成优弧/劣弧"的合法性来源。

符号 $S(\alpha)$ 里的 $\frac{1}{4}n\theta$ 怎么读 $P^{n-\frac{1}{4}n\theta+\varepsilon}$ 的指数是 $n - \frac{1}{4}n\theta + \varepsilon$ 。其中 n 是变量个数， θ 是我们选的参数。 $\frac{1}{4}n\theta$ 这个" $\frac{1}{4}$ "来自三次型 Weyl 估计里逐次平方降次的损耗（第 13 章的内容），这里当作已知系数直接用。

译文·第2段（式 15.2） "……这些实数具有满足下述条件的有理逼近 a/q ： $(a, q) = 1$, $1 \leq q \ll P^{2\theta}$, $|q\alpha - a| \ll P^{-3+2\theta}$."

逐项拆解 (15.2):

$$(a, q) = 1, \quad 1 \leq q \ll P^{2\theta}, \quad |q\alpha - a| \ll P^{-3+2\theta}. \quad (15.2)$$

$$(a, q) = 1$$

分数 a/q 是最简的 (见 0.5)。这样每个"逼近中心"只数一次, 不重复。

$$1 \leq q \ll P^{2\theta}$$

分母 q 不能太大——被 P 的一个小幂 $P^{2\theta}$ 卡住。分母小 = 分数"简单"。

θ 越小, 允许的分母越少, "简单分数"的清单越短。

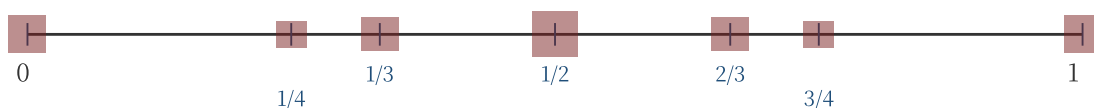
$$|q\alpha - a| \ll P^{-3+2\theta}$$

把它两边除以 q : $|\alpha - \frac{a}{q}| \ll \frac{1}{q} P^{-3+2\theta}$ 。也就是 α 离分数 a/q 的距离非常小 (量级 $P^{-3+\dots}$, 当 P 大时极小)。所以 $\xi(\theta)$ 就是"以各个简单分数 a/q 为中心、半径约 $\frac{1}{q} P^{-3+2\theta}$ 的一堆小区间的并"。

记号 $\xi(\theta)$ 希腊字母 ξ 读"克西"。 $\xi(\theta)$ 是一个**实数集合** (不是一个数!), 定义为"所有满足备选 B (即 (15.2)) 的 α 的全体"。它依赖参数 θ : θ 越大, (15.2) 越宽松 (q 可更大、区间可更宽), $\xi(\theta)$ 这个集合就越大。即 $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \xi(\theta_1) \subseteq \xi(\theta_2)$ 。这条**单调嵌套**性质是引理 15.1 证明的骨架。

$\xi(\theta)$: 红色小区间的并集 (围着简单分数 a/q)

分母 q 越大, 区间越窄; θ 越大, 区间越多越宽



集合 $\xi(\theta)$ 由围绕各最简分数 a/q ($q \ll P^{2\theta}$) 的小区间拼成。红区间之外的 α 满足备选 A ($|S(\alpha)|$ 小)。

译文·第3段 "只要 $n \geq 17$, 这个结果就足以满意地估计 $\xi(\theta_0)$ 之外所有 α 对积分 $\mathcal{N}(P)$ 的贡献, 其中 θ_0 可取任意固定正数, 与 P 无

关。显然把 θ_0 取小是有利的。"

这段在讲什么：它预告了本章的"分工方案"，并解释参数 θ_0 的取法理由。

- **为什么是 $n \geq 17$ ：**下面引理 15.1 的证明会逼出一个不等式 $\theta_{g-1} > \frac{16}{17}\theta_g + \dots$ 。这里的 $16/17$ 要求系数 $\frac{16}{n} < 1$ ，即 $n > 16$ ，也就是 $n \geq 17$ 。变量个数越多，各项越能充分抵消、劣弧上越好控制。17 是这套估计能跑通的最小维数。（这也是历史上 Davenport 证明"17 个变量的非奇异三次型必有非平凡整数零点"这一著名定理的来由。）
- **θ_0 是个固定的小正数：**它划定优弧与劣弧的分界线。 θ_0 取得越小，优弧 $\xi(\theta_0)$ 越窄、越少（因为 $q \ll P^{2\theta_0}$ 允许的分母更少），优弧上要做的精细计算就越轻；同时劣弧变大，但只要 $n \geq 17$ ，劣弧仍能被引理 15.1 全部压下去。所以"把 θ_0 取小有利"。"固定、与 P 无关"是要点： θ_0 是先选定的常数，不随盒子放大而变。

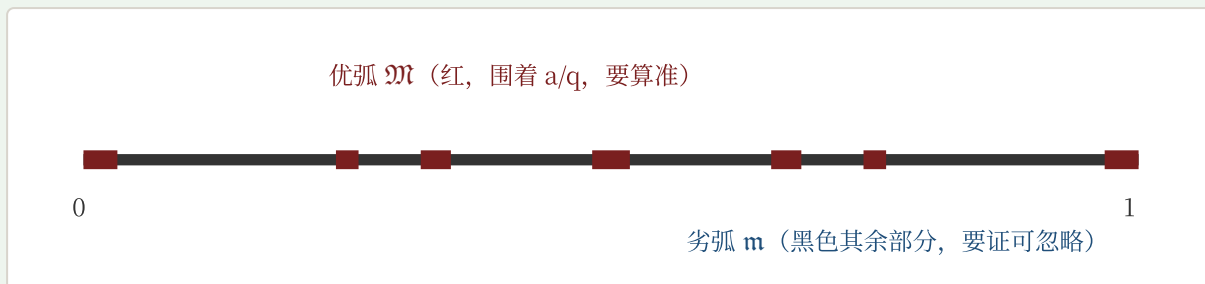
译文·第 4 段（优弧/劣弧的定义） "我们定义优弧 $\mathfrak{M}$ 为集合 $\xi(\theta_0)$ ……并定义劣弧 $\mathfrak{m}$ 为它关于区间 $0 < \alpha < 1$ 的补集。"

记号 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{m}$ 花体大写 $\mathfrak{M}$ (major, 优弧)、花体小写 $\mathfrak{m}$ (minor, 劣弧)。优弧 $\mathfrak{M} = \xi(\theta_0)$ ：靠近简单分数的那些小区间 ($S(\alpha)$ 在这里"大且规律", 是主信号)。劣弧 $\mathfrak{m} = (0, 1) \setminus \mathfrak{M}$ ：区间 $(0, 1)$ 里剩下的全部 ($S(\alpha)$ 在这里"小且杂乱", 是噪声)。“补集”就是高中集合论里的“全集去掉这部分”。

"弧" (arc) 这个词来自 0.1 的图像：区间 $[0, 1]$ 通过 $\alpha \mapsto e(\alpha)$ 缠成一个单位圆， $[0, 1]$ 上的一段小区间就对应圆上的一小段弧。Hardy 与 Littlewood 在 1920 年代发明圆法时就在这个圆上工作，"major/minor arcs"由此得名。我们把整个积分劈成两半：

$$\mathcal{N}(P) = \int_0^1 S(\alpha) d\alpha = \underbrace{\int_{\mathfrak{M}} S(\alpha) d\alpha}_{\text{主项 (要算准)}} + \underbrace{\int_{\mathfrak{m}} S(\alpha) d\alpha}_{\text{误差 (要证小)}}.$$

整章的剧本就是：引理 15.1 证右边那块小到可忽略；引理 15.2–15.4 把左边那块算成漂亮的乘积。



优弧 $\mathfrak{M}$ 是一小撮围着简单分数的短区间 (红)；它们之间剩下的全部黑色部分就是劣弧 $\mathfrak{m}$ 。两者无缝拼成 $[0, 1]$ 。

第 2 节 引理 15.1：劣弧上的积分小到可忽略

引理 15.1. 只要 $n \geq 17$, 就有

$$\int_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)| d\alpha \ll P^{n-3-\delta} \quad (\delta > 0).$$

这条引理在说什么、为什么这样要求：主项 $\int_{\mathfrak{M}} S$ 的量级我们最后会看到是 P^{n-3} （这正是齐三次方程解数的自然量级：约 P^n 个点，落在 $C = 0$ 这一个三次约束上“应分得”的比例约 P^{-3} ）。所以只要劣弧贡献是 $P^{n-3-\delta}$ （带一个正的 δ ，严格比主项低一个幂次），它在 $P \rightarrow \infty$ 时相对主项就趋于 0，可放心扔掉。注意左边用的是 $|S(\alpha)|$ （取模再积分），这比 $|\int_{\mathfrak{m}} S d\alpha|$ 更强（三角不等式 $|\int S| \leq \int |S|$ ），证到它就够了。

记号 δ 希腊字母 delta, 这里是一个固定的小正数, 表示"主项比误差高出的那一点点幂次余量"。它和 ε 一样小, 但角色不同: δ 是我们要争取到的"安全边际"。

译文·证明第1段 "我们选取一组数 $\theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_h = \frac{3}{4} + \delta$ 。每个实数 α 都落在 $\xi(\theta_h)$ 中, 因为总能找到 a, q 使 $(q \leq P^{3/2}, |q\alpha - a|$

证明思路总览: 劣弧太大, 不能一口吃下。技巧是把它切成一层层的"壳"——像洋葱: 从最外层 $\xi(\theta_h)$ 一层层剥到 $\xi(\theta_0)$ 。每一层壳 $\xi(\theta_g) - \xi(\theta_{g-1})$ 上, 我们能同时控制两件事: (i) 这层壳里 α 不在 $\xi(\theta_{g-1})$ 中, 故备选 A 以 $\theta = \theta_{g-1}$ 成立, 给出 $|S|$ 的上界; (ii) 这层壳的"长度(测度)"不超过 $\xi(\theta_g)$ 的测度, 可算。两者一乘就是这层的积分贡献。把所有层加起来即得。

把"显然"补全为完整步骤:

1 选一串递增的参数 $\theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_h = \frac{3}{4} + \delta$ 。最小的 θ_0 是优弧的分界, 最大的 $\theta_h = \frac{3}{4} + \delta$ 是一个"足够大、能装下所有 α "的值。中间插多少个、插多密, 待会儿按需要定(这是后面"选得足够接近"的伏笔)。

2 验证最外层 $\xi(\theta_h)$ 装得下每个实数 α 。用狄利克雷逼近定理(见 0.5) 取 $Q = P^{3/2}$: 对任意 α , 存在 $1 \leq q \leq P^{3/2}$ 与整数 a 使 $|q\alpha - a| \leq 1/Q = P^{-3/2}$ 。

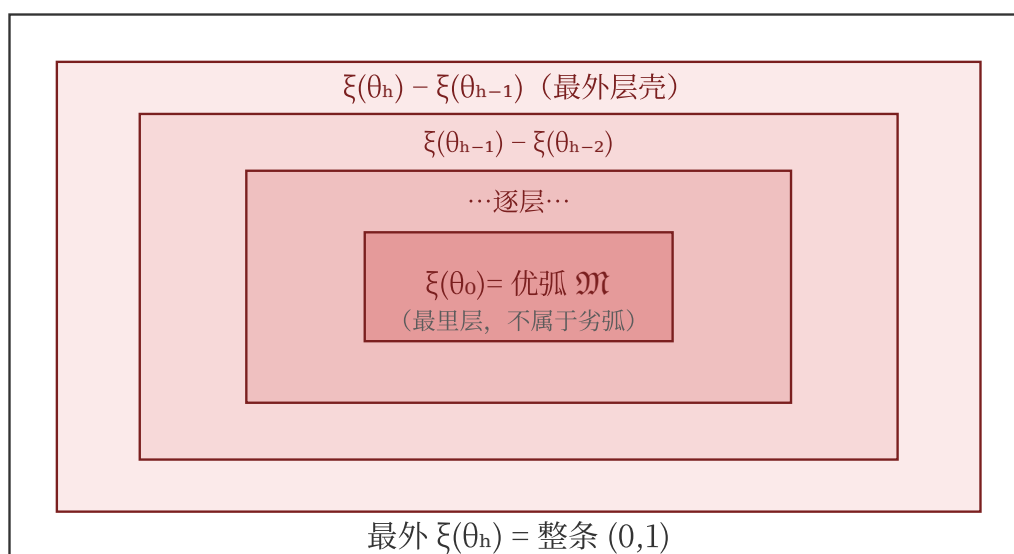
3 核对这恰好就是 $\xi(\frac{3}{4} + \delta)$ 的条件。把 $\theta = \frac{3}{4} + \delta$ 代入 (15.2): 要求 $q \ll P^{2\theta} = P^{3/2+2\delta}$, 而我们有 $q \leq P^{3/2}$, 满足 $(P^{3/2} \leq P^{3/2+2\delta})$; 要求

$|q\alpha - a| \ll P^{-3+2\theta} = P^{-3/2+2\delta}$, 而我们有
 $|q\alpha - a| \leq P^{-3/2} \leq P^{-3/2+2\delta}$, 也满足。故
 $\alpha \in \xi(\frac{3}{4} + \delta) = \xi(\theta_h)$ 。结论: $\xi(\theta_h) =$ (几乎) 整条 $(0, 1)$,
 每个 α 都在里面。

4 把劣弧写成壳的并。劣弧 $m = (0, 1) \setminus \xi(\theta_0)$ 。因为
 $\xi(\theta_0) \subseteq \xi(\theta_1) \subseteq \cdots \subseteq \xi(\theta_h) = (0, 1)$ (单调嵌套, 见 $\xi(\theta)$
 的符号框), 整段 $(0, 1)$ 去掉最里层 $\xi(\theta_0)$, 剩下的可一层层
 拆:

$$m = (\xi(\theta_h) - \xi(\theta_{h-1})) \cup \cdots \cup (\xi(\theta_1) - \xi(\theta_0)).$$

这里 $X - Y$ 是集合差"在 X 里但不在 Y 里" (高中集合论的
 $X \setminus Y$)。相邻两层的差恰好两两不重叠, 拼起来就是整个劣
 弧。



洋葱式分层: 最里层 $\xi(\theta_0)$ 是优弧; 其外每一圈"壳" $\xi(\theta_g) - \xi(\theta_{g-1})$ 合起来
 就是劣弧。在每层壳上分别估计 $|S|$ 的上界与壳的测度。

译文·证明第2段(核心估计) "在 $\xi(\theta_g) - \xi(\theta_{g-1})$ 上, (15.1) 以 $\theta = \theta_{g-1}$ 成立, 故 $|S(\alpha)| \ll P^{n-\frac{1}{4}n\theta_{g-1}+\varepsilon}$ 。该集合测度不超过 $\xi(\theta_g)$ 的测度 $\ll \sum_{q \leq P^{2\theta_g}} \sum_{a=1}^q q^{-1} P^{-3+2\theta_g} \ll P^{-3+4\theta_g}$ 。因此其贡献 $\ll P^{n-\frac{1}{4}n\theta_{g-1}-3+4\theta_g+\varepsilon}$ 。当 $n \geq 17$, 只要 $\theta_{g-1} > \frac{16}{17}\theta_g + \frac{4}{17}(\delta + \varepsilon)$, 这就是 $\ll P^{n-3-\delta}$ 。可把 $\theta_1, \dots, \theta_h$ 取得彼此足够接近使之成立。"

这是全证明的心脏。我们把每一步、每个量级都算清楚。

记号"测度" 一个由区间拼成的集合的**测度**就是这些区间**总长度** (高中说的"区间长度之和")。积分 $\int_E |S(\alpha)| d\alpha$ 可以粗暴地用 $(\max_E |S|) \times (E \text{ 的测度})$ 来上界控制——"最高的高度 $\times$ 底的宽度 $\geq$ 真实面积"。这就是下面"上界 $\times$ 测度"打法的依据。

1 这层壳上 $|S|$ 的上界。壳 $\xi(\theta_g) - \xi(\theta_{g-1})$ 里的点都不在 $\xi(\theta_{g-1})$ 中, 即对 $\theta = \theta_{g-1}$ 备选 B 失败, 于是备选 A (即 (15.1)) 必成立:

$$|S(\alpha)| \ll P^{n-\frac{1}{4}n\theta_{g-1}+\varepsilon} \quad (\alpha \in \xi(\theta_g) - \xi(\theta_{g-1})).$$

这里用 θ_{g-1} (不是 θ_g) 是关键——因为"不在 $\xi(\theta_{g-1})$ "才是我们手里的信息。

2 这层壳的测度上界。壳 $\subseteq \xi(\theta_g)$, 故其测度 $\leq \xi(\theta_g)$ 的测度。而 $\xi(\theta_g)$ 是一堆围着 a/q ($q \leq P^{2\theta_g}$ 、 $(a, q) = 1$) 的小区间的并, 每个区间长度为 $2 \cdot \frac{1}{q} P^{-3+2\theta_g} \ll \frac{1}{q} P^{-3+2\theta_g}$ (由 (15.2) 第三式除以 q 得来, 见第1节)。把它们全加起来:

$$\text{测度} \ll \sum_{q \leq P^{2\theta_g}} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \frac{1}{q} P^{-3+2\theta_g}.$$

- 3 先对 a 求和。固定 q ，里层求和项 $\frac{1}{q} P^{-3+2\theta_g}$ 与 a 无关， a 取 1 到 q 中与 q 互素者，个数 $\leq q$ （满打满算 q 个）。所以

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \frac{1}{q} P^{-3+2\theta_g} \leq q \cdot \frac{1}{q} P^{-3+2\theta_g} = P^{-3+2\theta_g}.$$

(q 与 $1/q$ 恰好抵消——这是分母 q 起的"归一化"作用。)

- 4 再对 q 求和。上式与 q 无关， q 从 1 取到 $\leq P^{2\theta_g}$ ，共 $\ll P^{2\theta_g}$ 个值：

$$\text{测度} \ll \sum_{q \leq P^{2\theta_g}} P^{-3+2\theta_g} \ll P^{2\theta_g} \cdot P^{-3+2\theta_g} = P^{-3+4\theta_g}.$$

这正是译文里那个 $\ll P^{-3+4\theta_g}$ 。

- 5 上界 $\times$ 测度 = 这层壳的积分贡献。

$$\int_{\xi(\theta_g)-\xi(\theta_{g-1})} |S(\alpha)| d\alpha \ll \underbrace{P^{n-\frac{1}{4}n\theta_{g-1}+\varepsilon}}_{|S| \text{ 上界}} \times \underbrace{P^{-3+4\theta_g}}_{\text{测度}} = P^n$$

- 6 要它 $\ll P^{n-3-\delta}$ ，比较指数。需要

$$n - \frac{1}{4}n\theta_{g-1} - 3 + 4\theta_g + \varepsilon \leq n - 3 - \delta.$$

两边消去 $n - 3$ ，移项得 $\frac{1}{4}n\theta_{g-1} \geq 4\theta_g + \varepsilon + \delta$ ，即

$$\theta_{g-1} \geq \frac{16}{n} \theta_g + \frac{4}{n} (\delta + \varepsilon).$$

- 7 用上 $n \geq 17$ 。当 $n \geq 17$ 时 $\frac{16}{n} \leq \frac{16}{17} < 1$ 且 $\frac{4}{n} \leq \frac{4}{17}$ ，所以只要更强的

$$\theta_{g-1} > \frac{16}{17} \theta_g + \frac{4}{17} (\delta + \varepsilon)$$

成立，上一行就自动成立。这正是译文给的条件。注意

16/17 < 1 是命门：系数严格小于 1，才可能让较小的 θ_{g-1} 压住较大的 θ_g 。若 $n \leq 16$ ，系数 ≥ 1 ，这条路就走不通——这就是 " $n \geq 17$ " 的精确来历。

- 8 为什么"取得足够接近"就能办到。把上一条不等式改写成 $\theta_g - \theta_{g-1} < \frac{1}{17} \theta_g - \frac{4}{17} (\delta + \varepsilon)$ 。只要 θ_g 有正的下界（它 $\geq \theta_0 > 0$ ），且 δ, ε 取得足够小，使右边 $\frac{1}{17} \theta_g - \frac{4}{17} (\delta + \varepsilon) > 0$ ，那么把相邻的 θ_{g-1}, θ_g 之间的间距取得比这个正数还小，不等式就成立。区间 $[\theta_0, \frac{3}{4} + \delta]$ 长度有限，要插入足够密的有限多个分点 $\theta_1, \dots, \theta_{h-1}$ 当然办得到。层数 h 是一个有限常数，与 P 无关。

译文·证明收尾 "……于是得到所要的结论。"

- 1 把各层加起来。每一层壳的贡献都 $\ll P^{n-3-\delta}$ ，层数 h 是有限常数，故

$$\int_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)| d\alpha = \sum_{g=1}^h \int_{\xi(\theta_g) - \xi(\theta_{g-1})} |S| d\alpha \ll h \cdot P^{n-3-\delta} \ll$$

(有限个 $\ll P^{n-3-\delta}$ 相加, 常数倍仍是 $\ll P^{n-3-\delta}$ 。) 引理 15.1 证毕。■

小结 劣弧虽大, 但 $|S|$ 在那里足够小; 通过"洋葱分层 + 每层用 θ_{g-1} 控高度、用 θ_g 控宽度", 把整块劣弧积分压到了主项之下。
 $n \geq 17$ 恰好保证压得住。

第 3 节 转向优弧：放大区间与两个新对象

$S_{a,q}, I(\beta)$

译文·第 5 段 "现在处理优弧 $\mathfrak{M}_{a,q}$, 由 (15.2) 取 $\theta = \theta_0$ 给出。

令 $2\theta_0 = \Delta$, 则 (15.2) 变为

$(a, q) = 1, 1 \leq q \ll P^\Delta, |q\alpha - a| \leq P^{-3+\Delta}$ 。"

记号 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 与 Δ $\mathfrak{M}_{a,q}$ 是优弧中"围着一个具体分数 a/q "的那一小段区间 (带下标 a, q); 整个优弧 $\mathfrak{M}$ 是所有这些小段的并。 Δ (大写 delta) 只是缩写 $\Delta := 2\theta_0$ ——把 (15.2) 里反复出现的 $2\theta_0$ 换成单个字母, 式子更清爽。 θ_0 小, 则 Δ 小。

逐项核对换元后的式子。把 $\theta = \theta_0$ 代入 (15.2), 再用 $\Delta = 2\theta_0$:

- 分母条件 $q \ll P^{2\theta_0} = P^\Delta$ 。✓
- 逼近条件 $|q\alpha - a| \ll P^{-3+2\theta_0} = P^{-3+\Delta}$; 这里把 $\ll$ 写成 $\leq$ (吸收常数, 约定优弧就这样定义)。✓

于是优弧 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 是中心 a/q 、半宽 $\frac{1}{q}P^{-3+\Delta}$ 的区间 (把 $|q\alpha - a| \leq P^{-3+\Delta}$ 除以 q)。注意此时区间宽度还依赖 q (带着 $1/q$)——这给后面的计算添麻烦, 所以下一段要"放大"它。

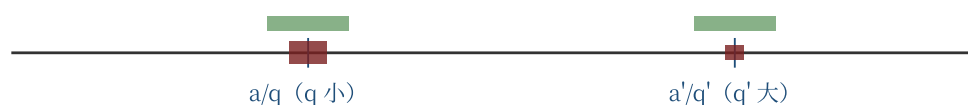
译文·第6段(放大优弧, 式 15.3) "把优弧略微放大会方便; 用区间 $\mathfrak{M}'_{a,q}$ 代替它们, 把最后一个不等式左边除以 q 、右边不除: $(a, q) = 1, 1 \leq q \ll P^\Delta, |\alpha - a/q| \leq P^{-3+\Delta}$ 。这样做显然允许, 因为附加集合的贡献是劣弧对 $\int |S| d\alpha$ 贡献的一部分, 已被引理 15.1 覆盖。"

$$(a, q) = 1, \quad 1 \leq q \ll P^\Delta, \quad \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq P^{-3+\Delta}. \quad (15.3)$$

这一步做了什么、为什么能做:

- 1 **动作:** 原来的优弧条件是 $|q\alpha - a| \leq P^{-3+\Delta}$, 即 $|\alpha - a/q| \leq \frac{1}{q} P^{-3+\Delta}$ (宽度含 $1/q$)。新条件 (15.3) 直接写 $|\alpha - a/q| \leq P^{-3+\Delta}$ (去掉了 $1/q$)。因为 $q \geq 1$, 新区间比旧区间**更宽** (宽了 q 倍), 即 $\mathfrak{M}_{a,q} \subseteq \mathfrak{M}'_{a,q}$ 。这就是"放大"。区间记号加一撇 ' 表示"放大版"。
- 2 **为什么允许 (合法性):** 放大后多出来的那部分 $\mathfrak{M}'_{a,q} \setminus \mathfrak{M}_{a,q}$ 原本属于劣弧 $\mathfrak{m}$ 。而引理 15.1 已经证明**整个劣弧**上 $\int |S|$ 都 $\ll P^{n-3-\delta}$ 。把其中一小块从劣弧"借"到优弧来算, 对优弧主项的影响也被同一个 $P^{n-3-\delta}$ 误差控制住, 不会破坏最终结论。所以"显然允许"。
- 3 **需要确认不重叠:** 放大后各 $\mathfrak{M}'_{a,q}$ 仍互不相交 (否则会重复计数)。这由 Δ 足够小保证: 两个不同最简分数 $a/q \neq a'/q'$ ($q, q' \ll P^\Delta$) 之间的距离 $\geq \frac{1}{qq'} \gg P^{-2\Delta}$, 远大于区间半宽 $P^{-3+\Delta}$ (因为 $P^{-2\Delta} \gg P^{-3+\Delta}$, 即 $-2\Delta > -3 + \Delta$, 即 $\Delta < 1$, 对小 Δ 成立)。所以放大后区间仍彼此分离。

原优弧 $\mathfrak{M}_{a,q}$: 宽度 $\propto 1/q$ (随 q 变)



放大后 $\mathfrak{M}'_{a,q}$: 宽度都相同 (与 q 无关)

放大把"宽度随 q 变化"的区间统一成"宽度都等于 $2P^{-3+\Delta}$ "的区间。多出来的部分原属劣弧，已被引理 15.1 兜底。

译文·第 7 段 (放大的目的) "这一放大的目的，正如第 4 章，是使区间长度与 q 无关。只有当 q 被 P 的某个小幂界定时才可能；但只要可能，就带来一点简化：奇异级数与奇异积分的分离会在证明中较早处发生。"

为什么要让区间长度与 q 无关 (取舍解释):

- 后面引理 15.4 要把优弧上的积分 $\int_{\mathfrak{M}'} S d\alpha$ 拆成"对 a, q 求和"乘"对位置积分"两个独立部分。如果每个区间的积分上下限还含着 q (宽度 $\propto 1/q$)，那"积分"部分就甩不掉 q ，没法和"求和"部分干净地分家。把区间宽度统一成与 q 无关，求和与积分就能彻底分离——这正是 $\mathfrak{S}$ (奇异级数，只含 a, q 的和) 与 J (奇异积分，只含位置的积分) 能在引理 15.4 里"提前、利落地"分开的原因。
- 为什么"只有 q 被小幂界定时才能这样做": 放大多出的部分必须能被劣弧误差兜住。若允许 q 大到 P 的较大幂，放大区间会太宽、相互重叠、且多出的面积会超过劣弧能承受的 $P^{-3-\delta}$ 量级，论证就崩了。正因为这里 $q \ll P^\Delta$ (Δ 是小幂)，放大才安全。这是一个用"分母小"换"结构简化"的权衡。

译文·第8段 (定义 $S_{a,q}$ 与 $I(\beta)$) "我们定义

$S_{a,q} = \sum_{\mathbf{z}(\bmod q)} e\left(\frac{a}{q}C(\mathbf{z})\right)$, $I(\beta) = \int_{P\mathfrak{B}} e(\beta C(\boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\xi}$, 其中 $P\mathfrak{B}$ 是第13章定义 $S(\alpha)$ 时所用的盒子。"

这两个新对象是把 $S(\alpha)$ 在优弧上"近似分解"出来的两块零件, 下一节引理 15.2 会证明它们确实拼出 $S(\alpha)$ 。先讲清它们各自是什么、为什么这样定义。

记号"同余"与 $\mathbf{z}(\bmod q)$ " $\mathbf{z}(\bmod q)$ "表示 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ 的每个坐标只看它除以 q 的余数, 即 z_j 取遍 $0, 1, \dots, q-1$ 。这样的 $\mathbf{z}$ 共有 q^n 个 (每个坐标 q 种选择)。两个整数 $a \equiv b(\bmod q)$ 读作" a 与 b 模 q 同余", 意思是 $a-b$ 被 q 整除。同余是初等数论的基本语言, 高中竞赛里见过。

$$S_{a,q} = \sum_{\mathbf{z}(\bmod q)} e\left(\frac{a}{q}C(\mathbf{z})\right)$$

完整指数和 (complete exponential sum)。它只是把 $S(\alpha)$ 在 $\alpha = a/q$ 处、但求和范围缩到"一个周期" $\mathbf{z}(\bmod q)$ 的版本——一个有限的和 (q^n 项), 完全由 a, q 和三次型 C 决定, 与 P 无关。它刻画的是"在模 q 意义下, 方程 $C \equiv 0$ 的解结构", 即**算术信息**。它将组装成奇异级数 $\mathfrak{S}$ 。为什么这样定义合理? 因为 $C(\mathbf{x})$ 模 q 只依赖 $\mathbf{x}$ 模 q (三次型系数是整数), 所以 $e\left(\frac{a}{q}C(\mathbf{x})\right)$ 在 $\mathbf{x}$ 跑遍一个完整周期时的"平均行为"就由这 q^n 项捕捉。

$$I(\beta) = \int_{P\mathfrak{B}} e(\beta C(\boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\xi}$$

积分型生成函数 (连续版的 S)。把 $S(\alpha) = \sum_{\mathbf{x} \in P\mathfrak{B}} e(\alpha C(\mathbf{x}))$ 里的"对整点求和"换成"对盒子里连续点积分", 并把 α 记作 β 。它刻画的是"实数层面、几何层面"上 $C \approx 0$ 的体积, 即**分析信息**, 将组装成奇异积分 J 。 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 是连续变量,

$d\xi = d\xi_1 \cdots d\xi_n$ 是 n 重积分。 β 是 α 相对中心 a/q 的小偏移量 (下一节 $\alpha = \beta + a/q$)。

动机一句话 圆法在优弧上的核心信念是: "指数和 $\approx$ 算术因子 $\times$ 几何因子"。引理 15.2 把这句信念写成精确等式

$S(\alpha) \approx q^{-n} S_{a,q} I(\beta)$ ——前者 $S_{a,q}$ 管"模 q 的同余约束", 后者 $I(\beta)$ 管"实数盒子里的体积", q^{-n} 是归一化。这就是奇异级数与奇异积分日后分家的胚胎。

第 4 节 引理 15.2: 把 $S(\alpha)$ 在优弧上分解

引理 15.2. 对区间 $\mathfrak{M}'_{a,q}$ 中的 α , 令 $\alpha = \beta + a/q$, 则

$$S(\alpha) = q^{-n} S_{a,q} I(\beta) + O(P^{n-1+2\Delta}).$$

记号 β 与 $\alpha = \beta + a/q$ β (beta) 是 α 到优弧中心 a/q 的**偏移**: $\beta = \alpha - a/q$ 。在 (15.3) 中 $|\beta| \leq P^{-3+\Delta}$, 是个很小的量。把 α 拆成"主分数 a/q + 小偏移 β ", 是优弧分析的标准动作。

这条引理在说什么: 在每个优弧小区间上, 复杂的指数和 $S(\alpha)$ 可以被一个干净的乘积 $q^{-n} S_{a,q} I(\beta)$ 逼近, 误差只有 $O(P^{n-1+2\Delta})$ ——比主项 (量级会到 P^n 左右) 低了将近一整个幂次, 可控。下面把证明每步补全。

译文·证明开头 "引理 4.2 证明中的粗略论证此处也够用, 因为 q 与 P 相比非常小。不过现在要在 n 维而非一维工作, 即用积分代替求和。我们必须估计大盒子里整点个数与其体积之差。"

核心思想：把求和按"模 q 的余数类"分组，组内的相位 $\frac{a}{q}C$ 部分是常数（同余！），只剩 βC 这一慢变部分；而慢变部分的"求和"约等于"积分"，差就是我们要控制的误差。先做主项的恒等变形（译文跳过了，这里完整补上），再估误差。

4.1 主项怎么来的（译文省略，补全）

1 把每个整点 $\mathbf{x}$ 按余数拆分：令 $\mathbf{x} = q\mathbf{y} + \mathbf{z}$ ，其中 $\mathbf{z}$ 是余数
 $(0 \leq z_j < q)$

2 拆开相位 $\alpha = \beta + a/q$:

$$e\left(\alpha C(q\mathbf{y} + \mathbf{z})\right) = e\left(\frac{a}{q}C(q\mathbf{y} + \mathbf{z})\right) e\left(\beta C(q\mathbf{y} + \mathbf{z})\right).$$

（用了 $e(u + v) = e(u)e(v)$ ，即指数相加。）

3 第一个因子里用同余化简。因为 C 是整系数三次型，把 $q\mathbf{y} + \mathbf{z}$ 代入展开，凡含 $\mathbf{y}$ 的项都带因子 q （甚至 q^2, q^3 ），所以

$$C(q\mathbf{y} + \mathbf{z}) \equiv C(\mathbf{z}) \pmod{q}.$$

于是 $\frac{a}{q}C(q\mathbf{y} + \mathbf{z})$ 与 $\frac{a}{q}C(\mathbf{z})$ 相差一个整数，而 $e(\text{整数}) = 1$ （性质 0.1.3），故

$$e\left(\frac{a}{q}C(q\mathbf{y} + \mathbf{z})\right) = e\left(\frac{a}{q}C(\mathbf{z})\right).$$

关键点：这个因子只依赖 $\mathbf{z}$ ，与求和变量 $\mathbf{y}$ 无关，可以提到 $\mathbf{y}$ -求和号外面。

4 提出常数因子：

$$S(\alpha) = \sum_{\mathbf{z} \pmod{q}} e\left(\frac{a}{q}C(\mathbf{z})\right) \underbrace{\sum_{\mathbf{y}} e(\beta C(q\mathbf{y} + \mathbf{z}))}_{\text{对 } \mathbf{y} \text{ 的慢变和}}.$$

5 慢变和 $\approx$ 积分。把对 $\mathbf{y}$ 的求和近似成对连续变量 $\boldsymbol{\eta}$ 的积分（误差留到 4.2 估）：

$$\sum_{\mathbf{y}} e(\beta C(q\mathbf{y} + \mathbf{z})) \approx \int e(\beta C(q\boldsymbol{\eta} + \mathbf{z})) d\boldsymbol{\eta}.$$

对这个积分作换元 $\boldsymbol{\xi} = q\boldsymbol{\eta} + \mathbf{z}$ ，则 $d\boldsymbol{\xi} = q^n d\boldsymbol{\eta}$ （ n 维，每个坐标缩放 q 倍，体积元放大 q^n 倍），积分区域变回原大盒子 $P\mathfrak{B}$ ：

$$\int e(\beta C(q\boldsymbol{\eta} + \mathbf{z})) d\boldsymbol{\eta} = q^{-n} \int_{P\mathfrak{B}} e(\beta C(\boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\xi} = q^{-n} I(\beta)$$

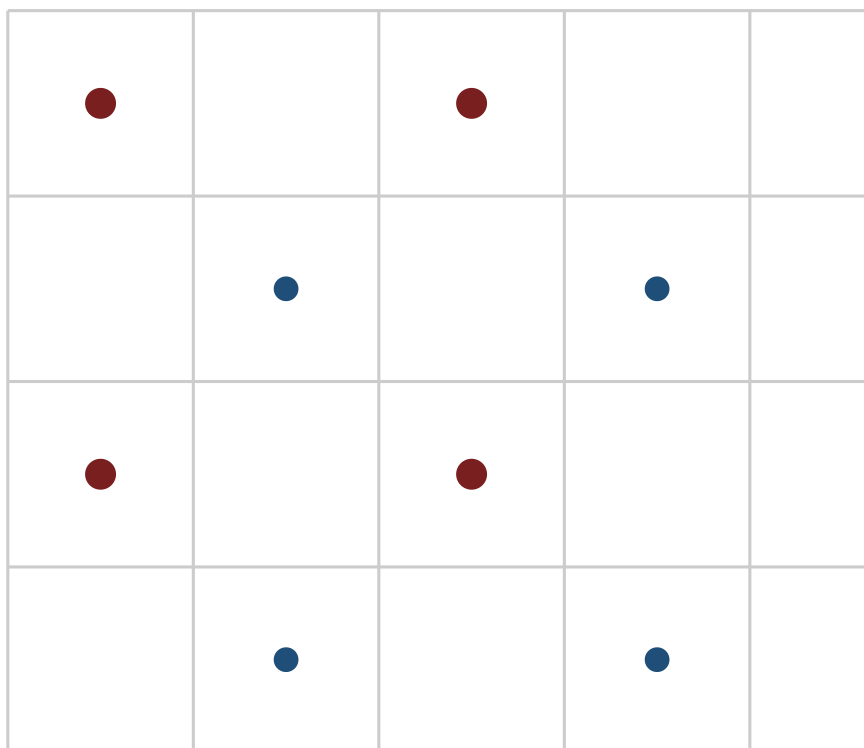
这个结果与 $\mathbf{z}$ 无关（换元后约束都化成同一个盒子）。

6 合成主项。把它放回去， $\mathbf{z}$ -求和只作用在第一个因子上，正好是 $S_{a,q}$ ：

$$S(\alpha) \approx \left(\sum_{\mathbf{z} \pmod{q}} e\left(\frac{a}{q}C(\mathbf{z})\right) \right) \cdot q^{-n} I(\beta) = q^{-n} S_{a,q} I(\beta).$$

主项的来历就此说清： q^{-n} 来自换元的体积因子， $S_{a,q}$ 来自同余化简后的 $\mathbf{z}$ -求和， $I(\beta)$ 来自慢变和化成的积分。

大盒子里的整点，每隔 q 取一个同色点



红：同一余数类 $\mathbf{z}$ （坐标差都是 q 的倍数） $\rightarrow$ 内层对 $\mathbf{y}$ 求和

把整点 $\mathbf{x}$ 写成 $q\mathbf{y} + \mathbf{z}$ ：相同余数 $\mathbf{z}$ （同色）的点构成一个稀疏子格。同余使 $e(\frac{a}{q}C)$ 在每个类内为常数，提到外面就分离出 $S_{a,q}$ 。

4.2 误差到底有多大（逐步估计）

译文·证明中段 "对 $\mathbf{y}$ 的盒子边长 $\ll P/q$ ，允许误差 $(P/q)^{n-1}$

。又要考虑被积函数在边长 1 范围内的变化：

$|\frac{\partial}{\partial \eta_j} \beta C(q\boldsymbol{\eta} + \mathbf{z})| \ll |\beta| q P^2 \ll q P^{-1+\Delta}$ 。由此误差为它乘以积分区域体积 $\ll (P/q)^n$ 。"

"用积分代替求和"会差多少？这是把连续积分离散成格点和的标准误差分析。我们要的是单个余数类 $\mathbf{z}$ 上 " $\sum_{\mathbf{y}} - \int d\boldsymbol{\eta}$ " 的大小。

记号 $\partial/\partial \eta_j$ （偏导数） 对多元函数只对其中一个变量 η_j 求导、把别的变量当常数，叫偏导数（大学内容，但理解成"沿第 j 个坐标方

向的变化率"即可)。它衡量函数在该方向上变化的快慢;下面用它来量"被积函数在一格之内能变多少"。

求和与积分之差的一般原理: 把光滑函数 f 在一个边长 L 的 n 维盒子里"按整点求和"对比"积分", 误差由两部分构成——(边界效应): 盒子表面附近多算/少算的格子, 量级 $\approx$ (表面积) $\times$ (f 的最大值) $\approx L^{n-1} \cdot \max |f|$; (内部波动): 每个单位格子内 f 不是常数带来的偏差, 量级 $\approx$ (体积) $\times$ (f 在一格内的最大变化) $\approx L^n \cdot$ (每格变化)。下面逐项代入。

1 盒子尺寸。约束 $\setminus (0$

2 边界效应项。被积函数 $f = e(\beta C(q\boldsymbol{\eta} + \mathbf{z}))$ 模长恒为 1, 故 $\max |f| = 1$ 。边界效应 $\ll L^{n-1} \cdot 1 = (P/q)^{n-1}$ 。这正是译文的"允许误差 $(P/q)^{n-1}$ "。

3 每格内的变化有多大——算偏导。对 η_j 求偏导:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j} [\beta C(q\boldsymbol{\eta} + \mathbf{z})] = \beta \cdot q \cdot \frac{\partial C}{\partial x_j}(q\boldsymbol{\eta} + \mathbf{z}).$$

(链式法则: 外层 βC , 内层 $x_j = q\eta_j + z_j$ 对 η_j 的导数是 q 。) 因为 C 是三次型, $\partial C / \partial x_j$ 是二次多项式; 其自变量 $q\boldsymbol{\eta} + \mathbf{z}$ 在大盒子里量级 $\ll P$, 故 $|\partial C / \partial x_j| \ll P^2$ 。于是

$$\left| \frac{\partial}{\partial \eta_j} \beta C(q\boldsymbol{\eta} + \mathbf{z}) \right| \ll |\beta| q P^2.$$

4 代入 $|\beta|$ 的界。优弧上 $|\beta| \leq P^{-3+\Delta}$, 所以

$$|\beta| q P^2 \ll P^{-3+\Delta} \cdot q \cdot P^2 = q P^{-1+\Delta}.$$

这就是译文的 $\ll qP^{-1+\Delta}$ 。它表示：被积函数 f 的"相位"在每移动一格 (η_j 变 1) 时改变 $\ll qP^{-1+\Delta}$ ，所以 f 本身在一格内的变化也 $\ll qP^{-1+\Delta}$ (因为 $|e(u) - e(v)| \leq 2\pi|u - v|$)。

5 内部波动项。= (每格变化) $\times$ (积分区域体积

$\ll L^n = (P/q)^n$):

$$qP^{-1+\Delta} \cdot (P/q)^n = qP^{-1+\Delta} \cdot P^n q^{-n} = P^{n-1+\Delta} q^{1-n}.$$

译文·证明末段 (合并误差) "求和与积分之差

$\ll (P/q)^{n-1} + qP^{-1+\Delta} P^n q^{-n} \ll P^{n-1+\Delta} q^{1-n}$ 。(若 $n = 1$ 则为 P^Δ ，对应引理 4.2 里的 P^δ 。) 对 $\mathbf{z}$ 的 q^n 个值求和，最终误差 $\ll P^{n-1+\Delta} q \ll P^{n-1+2\Delta}$ 。"

1 合并单类误差。把两项加起来：

$$(P/q)^{n-1} + P^{n-1+\Delta} q^{1-n} = P^{n-1} q^{1-n} + P^{n-1+\Delta} q^{1-n} \ll$$

(第一项 $(P/q)^{n-1} = P^{n-1} q^{-(n-1)} = P^{n-1} q^{1-n}$ ，比第二项少了因子 $P^\Delta \geq 1$ ，所以被第二项吸收。) 这就是单个余数类 $\mathbf{z}$ 上的求和-积分误差。

2 (对照 $n = 1$) 代 $n = 1$: $P^{0+\Delta} q^0 = P^\Delta$ ，正是一维情形 (引理 4.2) 里那个误差 P^δ 的类比。这句话只是帮你和前面学过的一维华林问题对上号。

3 对所有余数类求和。主项 4.1 里我们把误差留到了每个 $\mathbf{z}$ ；现在 $\mathbf{z}$ 共 q^n 个类，每类误差 $\ll P^{n-1+\Delta} q^{1-n}$ ，所以总误差

$$\ll q^n \cdot P^{n-1+\Delta} q^{1-n} = P^{n-1+\Delta} \cdot q^{n+1-n} = P^{n-1+\Delta} q.$$

4 代入 $q \ll P^\Delta$ 。优弧上 $q \ll P^\Delta$ ，故

$$P^{n-1+\Delta} q \ll P^{n-1+\Delta} \cdot P^\Delta = P^{n-1+2\Delta}.$$

这正是引理 15.2 误差项 $O(P^{n-1+2\Delta})$ 的来历。■

小结 引理 15.2 = "主项恒等变形" (同余把 $S_{a,q}$ 分离、换元把 $I(\beta)$ 分离) + "误差估计" (求和换积分的边界与波动误差, 被 q 小、 β 小压到 $P^{n-1+2\Delta}$)。从此优弧上 $S(\alpha)$ 有了可计算的近似式。

第 5 节 引理 15.3: 完整指数和 $S_{a,q}$ 的上界

引理 15.3. 对不表示零的固定三次型 $C(\mathbf{x})$, 有

$$|S_{a,q}| \ll q^{\frac{7}{8}n+\varepsilon}.$$

"不表示零的三次型" 指除了平凡解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 外, 方程 $C(\mathbf{x}) = 0$ 在某种意义下没有"退化"的解 (更准确地说是相关的非奇异性条件)。这一假设保证 $S_{a,q}$ 不会因为 C 太特殊而异常地大。这里当作前提直接用。

这条引理为什么重要: 第 6 节 (引理 15.4) 要把奇异级数 $\mathfrak{S}(P^\Delta) = \sum_q \sum_a q^{-n} S_{a,q}$ 加起来并证它收敛。要让这个和收敛、误差可控, 就必须知道每一项 $q^{-n} S_{a,q}$ 不会太大。引理 15.3 给出

$|S_{a,q}| \ll q^{\frac{7}{8}n+\varepsilon}$, 于是 $|q^{-n}S_{a,q}| \ll q^{-n+\frac{7}{8}n+\varepsilon} = q^{-\frac{1}{8}n+\varepsilon}$ ——当 n 大时这随 q 衰减得够快, 奇异级数才收敛。它是奇异级数能成立的"地基"。

译文·证明 "对和式 $S(\alpha)$ 用引理 13.4 备选 B, 取

$\alpha = a/q, P = q$, 盒子 $\mathfrak{B}$ 取 $0 \leq x_j < 1$ (求和盒子成 $\{(0 \leq x_j$

精妙之处: $S_{a,q}$ 本身是个有限和, 直接估不容易。技巧是把它认成另一个 $S(\alpha)$ ——令"放大倍数" $P = q$ 、盒子取单位立方体 $0 \leq x_j < 1$, 那么"大盒子"就是 $\{(0 \leq x_j$ 把第 13 章的二分律 (引理 13.4) 反过来套到 $S_{a,q}$ 上。逐步看:

1 套用二分律。对这个特殊的 $S(\alpha)$ ($\alpha = a/q, P = q$) 用引理 13.4, 取参数 $\theta = \frac{1}{2} - \varepsilon$ 。二分律给出"要么备选 A, 要么备选 B"。

2 备选 A 给出想要的界。若备选 A 成立: $|S(\alpha)|$ 这正是引理结论, A 成立就万事大吉。

3 所以只需排除备选 B。剩下要做的是证明: 对 $\alpha = a/q$, 备选 B 不可能发生——这样就只剩 A, 结论必成立。
备选 B 说存在 a'/q' 使 $|1 \leq q' \leq P^{1-2\varepsilon}|$, $|q'\alpha - a'|$

4 第一条推出 $|q'|$ 因 $q' \ll q^{1-2\varepsilon}$ 而 $|q'^{1-2\varepsilon}|$

5 把 $\alpha = a/q$ 代进第二条。 $\left| q'\alpha - a' \right| = \left| q' \frac{a}{q} - a' \right| = \left| \frac{q'a - a'q}{q} \right|$

6 分子是非零整数，故下界 $1/q$ 。分子 $q'a - a'q$ 是整数。它能等于 0 吗？若 $q'a - a'q = 0$ 则 $q'a = a'q$ ，因 $(a, q) = 1$ (a/q 最简) 必有 $q \mid q'$ ；但 $(1 \leq q'$ 非零整数，绝对值 ≥ 1 ，于是

$$\left| \frac{q'a - a'q}{q} \right| \geq \frac{1}{q}.$$

7 导出矛盾。把第 5、6 步合起来： $\frac{1}{q} \leq |q'\alpha - a'|$ 不可能成立。

8 结论。既然 B 被排除，二分律只剩 A，故 $|S_{a,q}| \ll q^{\frac{7}{8}n+\varepsilon}$ 。■

小结 把 $S_{a,q}$ 巧妙地认成 " $P = q$ 、单位盒子"下的 $S(\alpha)$ ，再用第 13 章的二分律：备选 B 因 a/q 是最简分数（分子非零、有下界 $1/q$ ）而被排除，于是备选 A 直接给出 $|S_{a,q}| \ll q^{\frac{7}{8}n+\varepsilon}$ 。

第 6 节 引理 15.4：优弧积分 = 奇异级数 $\times$ 奇异积分

引理 15.4. 若 $\mathfrak{M}'$ 是全体放大优弧 $\mathfrak{M}'_{a,q}$ 的并, 则对某个 $\delta > 0$,

$$\int_{\mathfrak{M}'} S(\alpha) d\alpha = P^{n-3} \mathfrak{S}(P^\Delta) J(P^\Delta) + O(P^{n-3-\delta}),$$

其中 $\mathfrak{S}(P^\Delta) = \sum_{q \leq P^\Delta} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q q^{n-3} S_{a,q} \quad J(P^\Delta) = \int_{|\gamma| \leq P^\Delta} |\gamma|^{n-3} d\gamma$

记号 $\mathfrak{S}$ (奇异级数) 与 J (奇异积分) 花体 $\mathfrak{S}$

(singular series, 奇异级数) 是一个对 a, q 的求和, 纯算术对象——把各个素数模下的解的密度信息打包; 它里头的 $\sum_{(a,q)=1}^q$ 暗含**欧拉函数** (见下框)。 J

(singular integral, 奇异积分) 是一个对实变量 γ 的积分, 纯几何/分析对象——把"实数解 (实点) 密度"打包。"奇异" (singular) 是 Hardy–Littlewood 的历史叫法, 并非"有奇点", 而是"主奇异项"之意。本章把 $\mathfrak{M}'$ 上的积分干净地写成 $P^{n-3} \cdot \mathfrak{S} \cdot J$: 算术 $\times$ 几何 $\times$ 尺度因子。它们的收敛与正性留给第 16、17 章。

欧拉函数 $\varphi(q)$ $\varphi(q)$ 读"phi q", 表示 1 到 q 中与 q 互素的整数个数。例如 $\varphi(6) = 2$ (只有 1、5)。本章里 $\sum_{a=1, (a,q)=1}^q$ 这种"对与 q 互素的 a 求和"恰好有 $\varphi(q)$ 项。它是数论里度量"互素密度"的标准函数, 奇异级数的每一层都用到它。

记号 γ (gamma) γ 是积分换元后用的新变量 (由 β 经 $\beta = P^{-3}\gamma$ 得来)。把 β 的小范围 $|\beta| \leq P^\Delta$

把 引 理 15.2 的 近 似 式 $S(\alpha) = q^{-n} S_{a,q} I(\beta) + O(P^{n-1+2\Delta})$ 在每个优弧上积分、再对所有 (a, q) 求和, 就得到这条总账。分"误差项"与"主项"两路算清。

译文·证明 (误差路) "引理 15.2 的误差项, 在 $\int_{|\beta| \leq P^{-3+\Delta}} O(P^{n-1+2\Delta}) d\beta$

1 单个优弧上对误差积分。引理 15.2 的误差是常数量级 $O(P^{n-1+2\Delta})$ (不随 β 变)。每个优弧 $\mathfrak{M}'_{a,q}$ 是 $|\beta| \leq P^{-3+\Delta}$, 长度 $2P^{-3+\Delta} \ll P^{-3+\Delta}$ 。积分 = 长度 $\times$ 高度: $\int_{|\beta| \leq P^{-3+\Delta}} O(P^{n-1+2\Delta}) d\beta$

2 对 a 求和。固定 q , 与 q 互素的 a 有 $\varphi(q) \leq q$ 个, 每个贡献同样 $\ll P^{n-4+3\Delta}$:

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q P^{n-4+3\Delta} \leq q P^{n-4+3\Delta}.$$

3 对 q 求和。 q 从 1 到 $\ll P^\Delta$, 且 $\sum_{q \ll P^\Delta} q \ll (P^\Delta)^2 = P^{2\Delta}$ (约 P^Δ 个 q , 每个 $\leq P^\Delta$):

$$\sum_{q \ll P^\Delta} q P^{n-4+3\Delta} \ll P^{2\Delta} \cdot P^{n-4+3\Delta} =$$

这正是译文的 $P^{n-4+5\Delta}$ 。

4 要它低于主项。要

$P^{n-4+5\Delta} \ll P^{n-3-\delta}$, 比较指数需

$n - 4 + 5\Delta \leq n - 3 - \delta$, 即

$5\Delta + \delta \leq 1$, 即 $\Delta \leq \frac{1-\delta}{5}$ 。只要把 Δ

(亦即 θ_0) 取得足够小, 这就成立——

回应了第 1 节" θ_0 取小有利"。误差路完成。

译文·证明(主项路) "主项给出 \

$(\sum_{q \leq l}$

$P^{\Delta} \sum_{(a,q)=1} q^{-n} S_{a,q} \int_{|\beta| \leq 1} d\beta$

$\int_{|\beta| \leq 1} d\beta$

1 把主项在所有优弧上加总。引理

15.2 主项是 $q^{-n} S_{a,q} I(\beta)$ 。在每个

优弧上对 β 积分、对 a, q 求

和: $\sum_{q \leq l} P^{\Delta} \sum_{(a,q)=1} q^{-n} S_{a,q} \int_{|\beta| \leq 1} d\beta$

$\sum_{(a,q)=1} q^{-n} S_{a,q} \int_{|\beta| \leq 1} d\beta$

$\sum_{(a,q)=1} q^{-n} S_{a,q} \int_{|\beta| \leq 1} d\beta$

$\sum_{(a,q)=1} q^{-n} S_{a,q} \int_{|\beta| \leq 1} d\beta$ 每个优弧的

β 范围都一样 ($|\beta| \leq 1$ 求和与积

分彻底独立、可分家。

2 求和部分 = 奇异级数。把

$\sum_q \sum_{(a,q)=1} q^{-n} S_{a,q}$ 单独拎出

来, 按定义就是 $\mathfrak{S}(P^\Delta)$ 。

3 积分部分换元 $\beta = P^{-3}\gamma$ 。令

$\beta = P^{-3}\gamma$, 则 $d\beta = P^{-3}d\gamma$;

范围 $\ll |\beta|$

4 用齐次性化简 $I(P^{-3}\gamma)$ (核心一步)。按定义

$$I(P^{-3}\gamma) = \int_{P\mathfrak{B}} e(P^{-3}\gamma C(\xi)) d\xi$$

。换元 $\xi = P\zeta$ (把大盒子 $P\mathfrak{B}$ 缩回单位盒子 $\mathfrak{B}$)，则

$$d\xi = P^n d\zeta, \text{ 而由三次型齐次性}$$

$$C(P\zeta) = P^3 C(\zeta):$$

$$P^{-3}\gamma C(P\zeta) = P^{-3}\gamma \cdot P^3 C(\zeta)$$

P^{-3} 与 P^3 恰好抵消! 于是

$$I(P^{-3}\gamma) = \int_{\mathfrak{B}} e(\gamma C(\zeta)) P^n d\zeta$$

这正是齐次三次方程解数主项里 P^{-3} 那个"3"的来源——三次型的"3"。

5 合成奇异积分。代回第 3 步: $\ll \int_{|\beta| \ll 1}$

6 主项合体。求和 ($=\mathfrak{S}$) 乘积分 ($=P^{n-3}J$):

$$\text{主项} = \mathfrak{S}(P^\Delta) \cdot P^{n-3} J(P^\Delta) =$$

7 主项 + 误差 = 引理结论。把主项路与误差路 ($\ll P^{n-3-\delta}$) 合起来:

$$\int_{\mathfrak{M}'} S(\alpha) d\alpha = P^{n-3} \mathfrak{S}(P^\Delta) J$$

引理 15.4 证毕。■

$$\int_{\mathfrak{M}'} S(\alpha) d\alpha = P^{n-3} \times \mathfrak{S}(\sum_{q \leq S_n, q} \text{算术}) \times J(\int \text{几何}) + O(P^{n-3-\delta})$$

尺度因子 × 算术密度 × 几何密度 —— 圆法主项的标准形状

引理 15.4 的成果：优弧积分 = P^{n-3} （尺度）
 × $\mathfrak{S}$ （模 q 的算术信息）× J （实数盒子的几何信息）+ 小误差。
 三块各自的收敛、求值、正性是接下来第 16–17 章的任务。

第 7 节 全章回顾：我们到底证明了什么

把四条引理串成一条逻辑链

1 起点（引理 13.4 二分律）：

每个 α 要么 $|S(\alpha)|$ 小，要么靠近某个简单分数 a/q 。
 据此把 $[0, 1]$ 切成劣弧 $\mathfrak{m}$ （小而杂）与优弧 $\mathfrak{M}$ （围着 a/q ）。

2 劣弧可忽略（引理 15.1）：洋

葱分层 + 逐层"上界 × 测度"，在 $n \geq 17$ 时把 $\int_{\mathfrak{m}} |S|$

压到 $\ll P^{n-3-\delta}$, 严格低于主项。

3 优弧上分解 S (引理 15.2):

放大区间使宽度与 q 无关后,

$$S(\alpha) = q^{-n} S_{a,q} I(\beta) + O(P^{n-1+2\Delta})$$

, 把"算术零件 $S_{a,q}$ "与"几何零件 $I(\beta)$ "分离。

4 控制算术零件 (引理 15.3):

把 $S_{a,q}$ 认作特殊的 $S(\alpha)$ 再用二分律, 得

$|S_{a,q}| \ll q^{\frac{7}{8}n+\varepsilon}$, 为奇异级数收敛奠基。

5 汇总 (引理 15.4):

$$\int_{\mathfrak{M}'} S d\alpha = P^{n-3} \mathfrak{S}(P^\Delta) J(P^\Delta) + O(P^{n-3-\delta})$$

。于是

$$\mathcal{N}(P) = \int_{\mathfrak{M}'} S + \int_{\mathfrak{m}} S = \mathfrak{S} P^{n-3} J + O(P^{n-3-\delta})$$

只要后面 (第 16、17 章) 证出

$\mathfrak{S} > 0$ 且 $J > 0$, 就得到

$\mathcal{N}(P) \gg P^{n-3} > 0$: 大盒子里必有非平凡整数解, 而且解数有了精确的主阶。这正是 Davenport "17 个变量的三次型必表示零"这一里程碑结果的解析骨架。

历史一瞥 圆法由 Hardy 与 Ramanujan (1918, 关于配分函数) 萌芽、Hardy 与 Littlewood (1920 年代) 系统化, 最初用于华林问题 (每个大整数是固定个数的 k 次方之和)。把它从"对角型 $\sum c_i x_i^k$ "推广到一般三次型 $C(\mathbf{x})$ 是大难题, 因为一般三次型没有变量分离的好结构, Weyl 型估计要重做 (第 13、14 章)。Davenport 在 1960 年代前后完成了这套工作, 证明只要变量数 $n \geq 17$ (在非奇异等条件下), 三次型方程 $C(\mathbf{x}) = 0$ 必有非平凡整数解。本章正是这条证明里"切弧 + 估计"的关键技术环节。后来 Heath-Brown 等人把 17 改进到了更小 (如 14、10), 但所用的总体框架仍是这里的优弧/劣弧分析。

返回 [全书目录](#)