

DAVENPORT · 圆法 · 高中详解版

三次型：奇异积分

Cubic forms: the singular integral

本页为**逐段高中详解**：先照搬译文的每一句话，再用普通高中生能听懂的语言把每一个符号、每一处「显然」「容易看出」的跳步全部补全。凡是超出高中课本的概念（复指数、积分、向量记号、判别式、有界变差、Fourier 积分定理……）都从零讲起。宁可啰嗦，不留死角。

本章要解决什么·读完能掌握什么

圆法（the circle method）把「方程 $C(\mathbf{x}) = 0$ 有多少组整数解」这个离散计数问题，翻译成一个积分。这个积分最后会拆成三块相乘：

$$\mathcal{N}(P) \approx (\text{主项系数}) \times \underbrace{\mathfrak{S}}_{\text{奇异级数}} \times \underbrace{J_0}_{\text{奇异积分}} \times P^{n-3}.$$

本章只负责最后那一块 J_0 （奇异积分，the singular integral）。我们要证明的事情只有一句话：只要把「盒子」 $\mathcal{B}$ 选得好，奇异积分 $J(\mu)$ 在 $\mu \rightarrow \infty$ 时收敛到一个正数 $J_0 > 0$ 。

为什么一定要它是正数？因为 J_0 是渐近公式里的一个乘法因子。如果 $J_0 = 0$ ，整个主项就垮成 0，渐近公式就废了，我们也就无法断言解的个数趋于无穷。所以「 $J_0 > 0$ 」是整条证明链上不可缺的一环。读完本章你会掌握：奇异积分是怎么来的、它为什么度量「实数解的稠密程度」、以及怎样用

一次换元把它化简成经典的 Dirichlet 积分，再用 Fourier 积分定理一锤定音。

0 先补三块高中没有的基础（读正文前必看）

基础一：复指数 $e(\alpha) = e^{2\pi i \alpha}$ 与单位圆

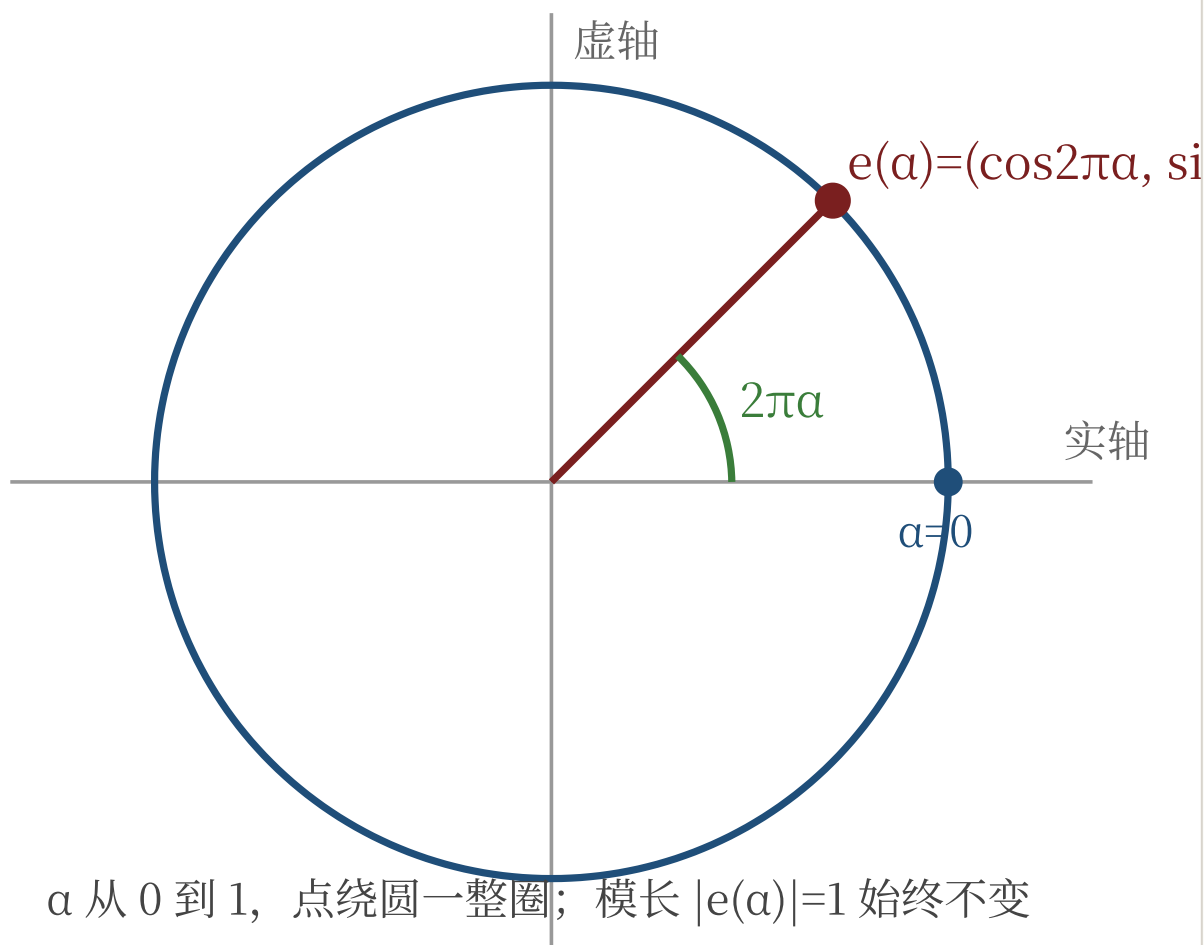
圆法里到处是记号 $e(\alpha)$ ，它读作「e 括号 alpha」，定义是

$$e(\alpha) := e^{2\pi i \alpha} = \cos(2\pi \alpha) + i \sin(2\pi \alpha).$$

这里 i 是虚数单位，满足 $i^2 = -1$ （高中选修里见过复数）。 2π 是一整圈的弧度。所以当 α 从 0 增加到 1 时，点 $e(\alpha) = (\cos 2\pi \alpha, \sin 2\pi \alpha)$ 在复平面上沿单位圆（半径 1 的圆）正好转一整圈。

三个必须记住的性质：

- 模长恒为 1: $|e(\alpha)| = \sqrt{\cos^2 + \sin^2} = 1$ 。它永远在单位圆上。
- 周期为 1: $e(\alpha + 1) = e(\alpha)$ ，因为转一整圈又回到原处。
- 加法变乘法: $e(\alpha) e(\beta) = e(\alpha + \beta)$ ，这就是指数法则 $e^A e^B = e^{A+B}$ 。



复指数 $e(\alpha)$ 就是单位圆上转角为 $2\pi\alpha$ 的那个点。圆法的名字（圆法）正来源于此：所有计算都在这个单位圆 / 周期为 1 的区间上进行。

基础二：定积分 $\int$ 、求和号没出现但向量积分要懂

记号 $\int_a^b f(x) dx$ 读作「从 a 到 b 对 f 求积分」，几何上就是函数曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴在 $[a, b]$ 之间围成的带正负号的面积（曲线在 x 轴下方时记负）。这是高中选修/大学微积分的内容，本章会反复用到，务必先有这个图像。

本章还出现多重积分 $\int_{\mathcal{B}} \cdots d\boldsymbol{\xi}$ 。这里 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 是一个 n 维向量（黑体表示「一串数」）， $\mathcal{B}$ 是 n 维空间里的一个区域（本章取成一个小立方体「盒子」）。记号

$$\int_B f(\xi) d\xi \quad \text{其实是} \quad \int \int \cdots \int f(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n,$$

也就是把 n 个一重积分套在一起、一层层地积。你可以把它想成「把盒子里每个小格子上的函数值乘以小格子的体积，再全加起来」。

基础三：齐次型 (form) 与判别式

书里说的「型」(form) 就是**齐次多项式**：每一项的次数都相同。例如 $\xi_2^2 + 3\xi_2\xi_3$ 是 2 次型（每项都是 2 次）， $C(\xi) = \sum c_{ijk}\xi_i\xi_j\xi_k$ 是 3 次型（每项都是 3 次）。本章主角 C 是一个 n 元的**三次型**，三次型 = 三次齐次多项式。

判别式 (discriminant)：一元三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 有一个由系数算出来的数 D ，叫判别式。它的关键作用是判断「有没有重根」： $D = 0 \iff$ 方程有重根（两个或三个根相等）。高中你最熟的是二次方程的判别式 $b^2 - 4ac$ ；三次方程也有类似但更复杂的公式，本章不需要它的具体形状，只用它「 $D = 0$ 当且仅当有重根」这一条性质。

1 奇异积分是什么——它从哪儿冒出来的

译文：奇异积分就是出现在引理 15.4 中的那个积分，即

$$J(\mu) = \int_{-\mu}^{\mu} \left(\int_B e(\gamma C(\xi)) d\xi \right) d\gamma, \quad (16.1)$$

这里我们把 P^Δ 记作 μ 。

这一段在讲什么 它给出了本章唯一研究对象 $J(\mu)$ 的**定义**，并说明它不是凭空写的，而是上一章（第 15 章）的引理 15.4 里自然蹦出来的那个二重积分。下面把式 (16.1) 里每个符号拆开讲。

$J(\mu)$ (读「J of mu」)

我们要研究的那个数，它依赖于一个参数 μ 。 J 取自 "integral" 这一脉的习惯字母（也可理解为「奇异积分」的值）。

μ (读「miu / mu」，希腊字母)

一个趋于无穷大的正参数。 $\mu = P^\Delta$ ： P 是圆法里那个「放大倍数」（我们在边长为 P 的范围里数整点）， Δ 是一个固定的小正指数。 $P \rightarrow \infty$ 时 $\mu = P^\Delta \rightarrow \infty$ 。所以本章关心的极限是 $\mu \rightarrow \infty$ 。

γ (读「gamma」，希腊字母)

外层积分的积分变量，跑遍区间 $[-\mu, \mu]$ 。它扮演的角色是上一章 α 在主弧上的「局部坐标」放大后的版本——你现在只需把它当成一个被积掉的实变量。

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ (黑体 xi，读「克西」)

内层积分的 n 维积分变量。黑体强调它是一串实数（一个向量 / 一个点），不是单个数。

$C(\xi)$

我们研究的那个三次型在点 ξ 处的值（一个实数）。整章的几何主角就是曲面 $C(\xi) = 0$ 。

$\mathcal{B}$ (花体 B，读「box / 盒子」)

n 维空间里的一个区域。第 13 章定义指数和 $S(\alpha)$ 时，整点 $\mathbf{x}$ 被限制在放大区域 $P\mathcal{B}$ 里；这个 $\mathcal{B}$ 就是那时用的同一个盒子。本章的全部自由度就是「怎么挑这个盒子」。

$d\xi = d\xi_1 \cdots d\xi_n$

n 维体积元，表示内层是对 ξ 的 n 重积分。

为什么会冒出这么个二重积分？——动机

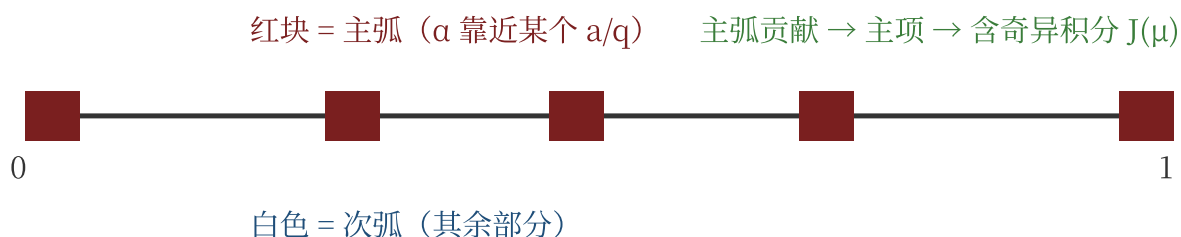
圆法的核心恒等式是：对任意整数 m ,

$$\int_0^1 e(\alpha m) d\alpha = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$$

(这是因为 $m \neq 0$ 时 $e(\alpha m)$ 绕圆整数圈、积分为 0; $m = 0$ 时被积函数恒为 1, 积分为 1)。于是把它用在 $m = C(\mathbf{x})$ 上, 就有

$$\mathcal{N}(P) = \#\{\mathbf{x} \in P\mathcal{B} \cap \mathbb{Z}^n : C(\mathbf{x}) = 0\} = \int_0^1 \left(\sum_{\mathbf{x} \in P\mathcal{B}} e(\alpha C(\mathbf{x})) \right) d\alpha = \int_{\mathcal{C}}$$

也就是说,「方程的整数解个数」被写成了一个积分——这正是圆法的出发点。接着把 $[0, 1]$ 切成「主弧 (major arcs)」与「次弧 (minor arcs)」: 主弧是 α 离有理数 a/q (小分母) 很近的小区间, 次弧是其余部分。次弧贡献很小 (上一章处理), 主弧贡献给出主项。在主弧上把求和 S 用积分近似、再做尺度放大, 主项里就分离出一个对连续变量的二重积分, 它就是 (16.1) 的 $J(\mu)$ 。一句话: $J(\mu)$ 是「整点求和」在主弧上被「实数积分」替换后剩下的那部分, 它度量的是方程 $C = 0$ 的实数解在盒子附近有多「稠密」。



圆法把 $[0, 1]$ 划成主弧 (红, 决定主项) 和次弧 (白, 可忽略)。奇异积分 $J(\mu)$ 就藏在主弧贡献里——它是本章要单独研究清楚的那块「实数因子」。

译文 (续): 它依赖于在第 13 章定义指数和 $S(\alpha)$ 时所用的盒子 $\mathcal{B}$, 本章的目标是证明: 我们能够把 $\mathcal{B}$ 选取得使得

$$J(\mu) \rightarrow J_0 > 0, \quad \text{当 } \mu \rightarrow \infty. \quad (16.2)$$

逐句解读

「它依赖于盒子 $\mathcal{B}$ 」——式 (16.1) 的内层积分是在 $\mathcal{B}$ 上做的, 所以 $\mathcal{B}$ 一变, $J(\mu)$ 就变。这句话点明: 盒子的选取是我们手里唯一的杠杆。

「本章目标」就是 (16.2): **存在一种盒子的选法**, 使得当 $\mu \rightarrow \infty$ 时 $J(\mu)$ 趋于一个严格大于 0 的极限值 J_0 。这里有两件事要做到: ①极限存在 (收敛); ②极限是正的 (不是 0)。两者缺一不可, 后面的证明会分别落实。

→ (读「趋于」)

极限记号。 $J(\mu) \rightarrow J_0$ 表示当 μ 越来越大, $J(\mu)$ 的值越来越接近固定的数 J_0 。

J_0 (读「J zero」)

那个极限值本身, 叫做**奇异积分 (的值)**。下标 0 只是个名字, 区分它与变量 $J(\mu)$ 。它必须 > 0 。

为什么叫「奇异」(singular)? ——名字的来历 「奇异积分」「奇异级数」里的「奇异 / singular」并不是「有奇点、发散」的意思, 而是 Hardy 与 Littlewood 在 1920 年代创立圆法时留下的**历史性术语**。它大致对应「主奇异部分 / 主导项」——即主弧分析中分离出来、决定主项大小的那个核心因子。与之并列的还有**奇异级数** $\mathfrak{S}$ (下一章 17 章的主题, 度量「各个素数模下解的稠密程度」)。两者一个管「实数 / 连续」一侧 (奇异积分), 一个管「同余 / 离散」一侧 (奇异级数), 合起来才给出整数解个数的渐近公式。记住: **奇异积分 = 实数解的密度因子**。

2 盒子放哪儿——以一个真实解为中心

译文: 我们将选取盒子 $\mathcal{B}$, 使它以方程

$$C(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*) = 0 \tag{16.3}$$

的一个实解 $\xi_1^*, \dots, \xi_n^*$ 为中心。

这一段在讲什么 回答「盒子 $\mathcal{B}$ 放在哪个位置」。答案是：放在曲面 $C = 0$ 上的某一点 ξ^* 处，让这一点当盒子的正中心。星号 $*$ 只是用来标记「这是我们选定的那个特定的解」，区别于一般变量 ξ 。式 (16.3) 就是说这一点确实落在曲面上（代进去等于 0）。

译文：这样做是自然的，因为我们的目标是得到 $\mathcal{N}(P)$ 的一个渐近公式，它将表明 $\mathcal{N}(P) \rightarrow \infty$ ；这里假定备择情形 A 已被排除。如果 $C(\xi) = 0$ 在 $\mathcal{B}$ 中没有实解，那么在 $P\mathcal{B}$ 中也不会有，从而 $\mathcal{N}(P)$ 就会是 0。

为什么「以一个真实解为中心」是自然的？——逻辑闭环

这里用了一个非常朴素但关键的道理，分两步：

1 目标决定手段。我们最终想证 $\mathcal{N}(P)$ （盒子放大 P 倍后里面的整数解个数）随 $P \rightarrow \infty$ 而趋于无穷。要让解越来越多，盒子里至少得「能装得下解」。

2 放缩的单调性。注意一个几何事实：曲面 $C = 0$ 是齐次的（ C 是齐次型），所以「 ξ 在 $\mathcal{B}$ 里且 $C(\xi) = 0$ 」与「 $P\xi$ 在 $P\mathcal{B}$ 里且 $C(P\xi) = P^3 C(\xi) = 0$ 」是一一对应的。于是如果连续区域 $\mathcal{B}$ 里压根没有 $C = 0$ 的实数解，那放大后的 $P\mathcal{B}$ 里也不会有任何实数解，里面的整数解就更不可能有了（整数解是实数解的特例），结论是 $\mathcal{N}(P) = 0$ 。

「a fortiori」（拉丁文，原文用词）意为「更何况、更加地」：连实数解都没有，整数解自然更没有。所以为了不让一切归零，必须把盒子骑在曲面上、含住至少一个实解——这就是「以实解为中心」的理由。

$\mathcal{N}(P)$ （读「N of P」）

把盒子放大 P 倍后，区域 $P\mathcal{B}$ 内满足 $C(\boldsymbol{x}) = 0$ 的整点 $\boldsymbol{x}$ （坐标全是整数的点）个数。这是圆法最终要估计的量。

备择情形 A (alternative A)

上一章（第 15 章）的次弧分析里出现了一个二选一的局面：要么「情形 A」（某种退化 / 系数特殊的坏情况，需另行排除），要么得到我们想要的好估计。本章默认坏情况 A 已被排除，所以可以放心追求 $\mathcal{N}(P) \rightarrow \infty$ 的渐近公式。你现在只需知道：这是把丑陋的例外情况先搁置的一个技术前提。

「a fortiori」

拉丁短语，「更不必说、尤其、更何况」。这里指：实解都没有，整数解更不会有。

3 不只是普通解——要「非奇异」且坐标全不为零

译文：事实上我们将取 $\xi_1^*, \dots, \xi_n^*$ 比 $C(\boldsymbol{\xi}) = 0$ 的任意实解要求得更多一些；我们将把它取为一个非奇异解，其中 $\xi_1^*, \dots, \xi_n^*$ 没有一个为 0。这是一个方便的选择，以确保 (16.2) 成立，而且这或许还是必要的。

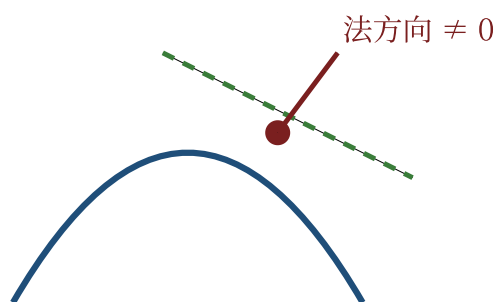
「非奇异解」是什么意思

脚注里给了定义：非奇异解 (non-singular solution) = 在该点处 C 的偏导数 不全为 0 的解。

偏导数 $\frac{\partial C}{\partial \xi_j}$ 读作「 C 对 ξ_j 的偏导数」，意思是：把其它变量都暂时看成常数，

只对 ξ_j 求导。它衡量「只动 ξ_j 这一个坐标时， C 变化得有多快」。把 n 个偏导数排成一行 $(\partial C / \partial \xi_1, \dots, \partial C / \partial \xi_n)$ ，这叫**梯度**，它垂直于曲面 $C = 0$ ，是曲面在该点的「法方向」。

「非奇异」就是要求这个梯度**不是零向量**。几何含义：在 ξ^* 处曲面 $C = 0$ 是光滑的、有一个确定的切平面，没有尖点 / 自交 / 退化。奇异点（梯度为 0 的点）则是曲面上的「坏点」。我们专挑好点。



非奇异点：曲面光滑，有切线（绿虚线）



奇异点：自交 / 尖点，法方向退化

左：非奇异点，曲面光滑、有唯一切平面（梯度非零）。右：奇异点，曲面在该处打结 / 起尖（梯度为零）。本章坚持把盒子中心选在**左边**这种好点上。

为什么要「更多一些」——动机

普通实解只保证「盒子里有解」。但本章真正要算的是 $J(\mu) \rightarrow J_0 > 0$ ：我们要在中心点附近把 C 近似成线性来做换元（后面 $c_1\eta_1 + \dots$ 那一步）。这要求中心点处至少有一个偏导数不为零——否则线性项全没了，换元失败。所以「非奇异」不是吹毛求疵，而是后面证明的技术前提。

「 ξ_j^* 没有一个为 0」则是更进一步的便利要求：它保证中心点不贴着任何坐标轴 / 坐标超平面，使后续的幂级数反演（把 η_1 解出来）在一个干净的小邻域里成立。书里诚实地说「**而且这或许还是必要的**（may even be essential）」——意思是这些额外条件不只是图方便，可能是让 (16.2) 成立所必需的，不能随便扔掉。

4 这样的好解一定存在——构造性证明

译文：这样一个解的存在性容易证明。对任意实数 $\xi_2, \dots, \xi_n$ ，我们都能找到一个实数 ξ_1 满足 $C(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$ ，而且只需保证

$$\xi_1 \neq 0 \quad \text{且} \quad \partial C / \partial \xi_1 \neq 0.$$

这一段在讲什么·「容易证明」要补全

书里说「容易证明」，下面我们把它一步不漏地补出来。**策略**：先随便固定后面 $n-1$ 个坐标 $\xi_2, \dots, \xi_n$ （当成参数），再把 $C = 0$ 看成只关于 ξ_1 的一元三次方程，解出 ξ_1 。

为什么这一步行得通？因为**实系数一元三次方程必有实根**——这是高中可理解的事实：三次函数 $y = ax^3 + \dots$ ($a \neq 0$) 在 $x \rightarrow +\infty$ 与 $x \rightarrow -\infty$ 时趋于 $+\infty$ 与 $-\infty$ （或反之），由连续函数的**介值定理**，它必定穿过 x 轴一次，即至少有一个实根。所以「找到实数 ξ_1 」总能办到。

但「找到解」还不够，我们要的是**好解**，于是附加两个条件： $\xi_1 \neq 0$ （坐标非零）和 $\partial C / \partial \xi_1 \neq 0$ （在 ξ_1 方向上非奇异，足以保证梯度非零）。下一段就逐一保证这两条能同时做到。

译文：对任意 $\xi_2, \dots, \xi_n$ ，关于 ξ_1 的方程形如

$$c_{111}\xi_1^3 + F\xi_1^2 + G\xi_1 + H = 0,$$

这里 F, G, H 分别是 $\xi_2, \dots, \xi_n$ 的 1, 2, 3 次型。只要 $H \neq 0$ （注意 H 不可能恒等于零），我们就有 $\xi_1 \neq 0$ 。设 $D(\xi_2, \dots, \xi_n)$ 为关于 ξ_1 的三次方程的判别式。那么只要 $D \neq 0$ ，我们就有 $\partial C / \partial \xi_1 \neq 0$ 。我们可以假定 D 不恒等于零，因为否则关于 ξ_1 的二重根将由 $\xi_2, \dots, \xi_n$ 有理地确定，于是我们便得到 $C(\xi) = 0$ 的有理解。

把三次型按 ξ_1 的幂次重排——为什么是这个形状

C 是 n 个变量的三次型。把它按 ξ_1 的次数收集同类项，每一项总次数恒为 3，所以：

- ξ_1^3 项：系数是常数 c_{111} (ξ_1 占满了全部 3 次，其余变量 0 次)；
- ξ_1^2 项：系数 F 必须是 $\xi_2, \dots, \xi_n$ 的 1 次型 ($2 + 1 = 3$)；
- ξ_1 项：系数 G 是 $\xi_2, \dots, \xi_n$ 的 2 次型 ($1 + 2 = 3$)；
- ξ_1^0 项：系数 H 是 $\xi_2, \dots, \xi_n$ 的 3 次型 ($0 + 3 = 3$)。

这就是为什么 F, G, H 分别是 1、2、3 次型——纯粹是「每项总次数 = 3」逼出来的。

为什么 $H \neq 0$ 就能保证 $\xi_1 \neq 0$

把上面的三次方程写成 $c_{111}\xi_1^3 + F\xi_1^2 + G\xi_1 + H = 0$ 。常数项就是 H 。一元方程的常数项 = 把 $\xi_1 = 0$ 代入左边的值。所以：

1 若 $\xi_1 = 0$ 是这方程的根，代入得左边 = H ，于是必有 $H = 0$ 。

2 逆否命题：只要 $H \neq 0$ ， $\xi_1 = 0$ 就不是根，从而我们解出的实根 ξ_1 必然 $\neq 0$ 。

「 H 不可能恒等于零」是说： $H(\xi_2, \dots, \xi_n)$ 作为一个 3 次型，不会对所有 $\xi_2, \dots, \xi_n$ 都取 0（否则 C 里就根本没有不含 ξ_1 的那部分，这与 C 是真正的 n 元三次型矛盾——这属于「一般位置」的假设）。所以总能挑到一组 $\xi_2, \dots, \xi_n$ 让 $H \neq 0$ ，从而 $\xi_1 \neq 0$ 。

为什么 $D \neq 0$ 就能保证 $\partial C / \partial \xi_1 \neq 0$

把 $g(\xi_1) := C(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 看成只含 ξ_1 的三次函数（其余固定）。注意 $\partial C / \partial \xi_1 = g'(\xi_1)$ ，就是它对 ξ_1 的导数。

1 假设我们解出的根 ξ_1 恰好让 $\partial C / \partial \xi_1 = g'(\xi_1) = 0$ 。那么 ξ_1 同时满足 $g(\xi_1) = 0$ 和 $g'(\xi_1) = 0$ 。

2 「 g 和 g' 有公共根」正是「 g 有重根」的定义（重根处函数值和导数同时为零，就像抛物线顶点贴着 x 轴）。

3 而一元三次方程「有重根」 $\iff$ 它的判别式 $D = 0$ （这是判别式的核心性质，见前面基础三）。

4 取逆否：只要 $D \neq 0$ ，方程就无重根，于是任何根 ξ_1 都满足 $g'(\xi_1) = \partial C / \partial \xi_1 \neq 0$ 。

这样一来， $\partial C / \partial \xi_1 \neq 0$ 就单独保证了「梯度不全为零」（因为梯度的第一个分量就已经非零），即解是**非奇异的**。

为什么可以假定 D 不恒等于零——一个漂亮的反证

万一对所有的 $\xi_2, \dots, \xi_n$ ，判别式 $D(\xi_2, \dots, \xi_n)$ 都恒等于 0 怎么办？书里说：那反而更好，因为这种情况能直接给出我们想要的解。理由：

1 $D \equiv 0$ 意味着对每组 $\xi_2, \dots, \xi_n$ ，关于 ξ_1 的三次方程总有**重根**。

2 三次方程的二重根有**显式公式**，可由系数**有理地**表达。这里的系数 c_{111}, F, G, H 都是 $\xi_2, \dots, \xi_n$ 的（有理系数）多项式。所以这个重根 ξ_1 是 $\xi_2, \dots, \xi_n$ 的**有理函数**。

3 于是只要给 $\xi_2, \dots, \xi_n$ 取**有理数值**，算出的 ξ_1 也是有理数，得到 $C = 0$ 的一组**有理解**。而有理解经过通分放大就是整数解——这正是圆

法想要的（解的存在性直接到手），根本不必再绕奇异积分。

换句话说：要么 $D \neq 0$ ，我们就能挑到非奇异实解（继续走积分这条路）；要么 $D \equiv 0$ ，我们直接白捡有理解（路更短）。两种情况都对我们有利，所以「假定 $D \neq 0$ 」是没有损失的。

c_{111}

三次型 $C = \sum c_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_k$ 中 ξ_1^3 那一项的系数（三个下标都是 1）。是个固定常数。

F, G, H

分别是 $\xi_2, \dots, \xi_n$ 的 1、2、3 次型，充当方程中 $\xi_1^2, \xi_1, 1$ 的系数。

$D(\xi_2, \dots, \xi_n)$

上述一元三次方程（变量 ξ_1 ）的判别式，本身是 $\xi_2, \dots, \xi_n$ 的多项式。

$D = 0 \iff$ 方程有重根。

「恒等于零 / 不恒等于零」（identically zero）

「恒等于零」指作为函数对所有自变量取值都为 0；「不恒等于零」指至少存在一组自变量使它非 0。这是「函数恒为 0」与「函数偶尔为 0」的区别。

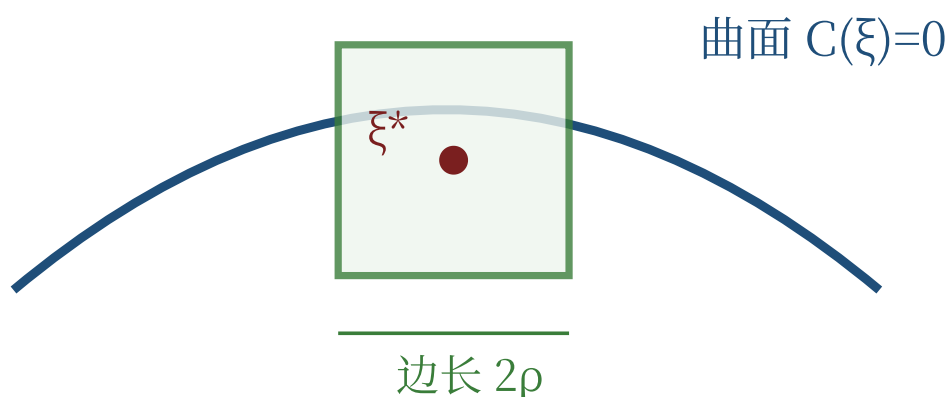
译文：这样我们便能找到 (16.3) 所期望的非奇异实解 $\xi_1^*, \dots, \xi_n^*$ 。我们取 $\mathcal{B}$ 为该点周围的一个小立方体，例如

$$|\xi_j - \xi_j^*| < \rho, \quad (1 \leq j \leq n). \quad (16.4)$$

盒子的具体形状 · ρ 是什么

前面证明了好解 $\xi^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$ 存在。现在把盒子 $\mathcal{B}$ 取成以 ξ^* 为中心、边长为 2ρ 的小立方体：每个坐标 ξ_j 都被限制在离中心坐标 ξ_j^* 不超过 ρ 的范围内，即 $|\xi_j - \xi_j^*| < \rho$ 。

ρ （读「rho」，希腊字母）是立方体的「半边长」，一个待定的小正数。本章的核心调参就是它：「只要 ρ 取得足够小，结论 (16.2) 就成立」。为什么小才行？因为后面要在中心附近做线性近似和幂级数反演，邻域越小，曲面越接近自己的切平面、误差项越可控。这就是「 ρ 充分小」反复出现的原因。



盒子骑在曲面上：中心 ξ^* 满足 $C(\xi^*)=0$ ，半边长 ρ 待定（要足够小）

盒子 B 是以非奇异实解 ξ^* 为正中心的小立方体 (16.4)。 ρ 越小，盒子越贴近曲面在 ξ^* 处的切平面，后续近似越精确。

5 引理 16.1：把结论正式立起来

引理 16.1 若 ρ 取得充分小，则 (16.2) 成立。即：存在足够小的半边长 ρ ，使得以 ξ^* 为中心、半边长 ρ 的盒子给出的奇异积分满足 $J(\mu) \rightarrow J_0 > 0$ ($\mu \rightarrow \infty$)。

证明的总路线（先看地图，再上路）

整个证明就三步，建议先记住这张地图，下面每一小节填一格：

- 1 把二重积分拍扁成一重。先对 γ 积分，用一条初等积分公式把内层 $\int_{-\mu}^{\mu} e(\gamma C) d\gamma$ 算成 $\frac{\sin 2\pi\mu C}{\pi C}$ ，于是 $J(\mu)$ 只剩对 ξ 的一个 n 重积分。
- 2 换元，把 C 本身当新坐标。在中心附近把 C 近似成线性，令 $\zeta = C(\xi^* + \eta)$ 当作新变量替换掉 η_1 。 n 重积分塌缩成「对 ζ 的一重积分」乘上一个权重函数 $V(\zeta)$ ，得到经典形状 (16.7)。
- 3 用 Dirichlet 核 / Fourier 积分定理取极限。 $\frac{\sin 2\pi\mu\zeta}{\pi\zeta}$ 在 $\mu \rightarrow \infty$ 时是一个「越来越尖的钉子」（趋于 δ 函数），它把积分挑出 $\zeta = 0$ 处的值，于是 $J(\mu) \rightarrow V(0)$ 。最后说明 $V(0) > 0$ ，大功告成。

5.1 第一步：先对 γ 积分，拍扁成一重积分

译文（证明）：我们有

$$\begin{aligned} J(\mu) &= \int_{-\mu}^{\mu} \left(\int_{\mathcal{B}} e(\gamma C(\xi)) d\xi \right) d\gamma \\ &= \int_{\mathcal{B}} \frac{\sin 2\pi\mu C(\xi)}{\pi C(\xi)} d\xi \\ &= \int_{-\rho}^{\rho} \cdots \int_{-\rho}^{\rho} \frac{\sin 2\pi\mu C(\xi^* + \eta)}{\pi C(\xi^* + \eta)} d\eta, \end{aligned} \tag{16.5}$$

其中 $\xi = \xi^* + \eta$ 。

第①个等号：交换积分次序

原式是先对 ξ (内)、再对 γ (外)。我们把次序换成先对 γ (内)、再对 ξ (外):

$$\int_{-\mu}^{\mu} \left(\int_{\mathcal{B}} e(\gamma C) d\xi \right) d\gamma = \int_{\mathcal{B}} \left(\int_{-\mu}^{\mu} e(\gamma C) d\gamma \right) d\xi.$$

凭什么能换? 因为积分区域是有界的 ($\gamma \in [-\mu, \mu]$, $\xi \in \mathcal{B}$ 有界), 被积函数 $|e(\gamma C)| = 1$ 连续有界, 由 **Fubini 定理** (多重积分换序定理, 大学内容) 即可交换。直观上: 一个有界区域上对一个有界连续函数求二重积分, 「横着先加」还是「竖着先加」结果一样。

第②个等号: 把内层 $\int_{-\mu}^{\mu} e(\gamma C) d\gamma$ 算出来 (核心公式, 逐步推)

固定 ξ , 记 $c = C(\xi)$ (一个常数)。我们要算 $\int_{-\mu}^{\mu} e(\gamma c) d\gamma = \int_{-\mu}^{\mu} e^{2\pi i c \gamma} d\gamma$ 。

1 对指数函数积分。 $\frac{d}{d\gamma} e^{2\pi i c \gamma} = 2\pi i c \cdot e^{2\pi i c \gamma}$, 所以它的原函数是 $\frac{e^{2\pi i c \gamma}}{2\pi i c}$ (前提 $c \neq 0$, 盒子里几乎处处成立)。于是

$$\int_{-\mu}^{\mu} e^{2\pi i c \gamma} d\gamma = \left[\frac{e^{2\pi i c \gamma}}{2\pi i c} \right]_{-\mu}^{\mu} = \frac{e^{2\pi i c \mu} - e^{-2\pi i c \mu}}{2\pi i c}.$$

2 用欧拉公式把复指数变成正弦。欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 给出

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta) - (\cos \theta - i \sin \theta) = 2i \sin \theta.$$

取 $\theta = 2\pi c \mu$: 分子 = $2i \sin(2\pi c \mu)$ 。

3 约分。

$$\frac{2i \sin(2\pi c \mu)}{2\pi i c} = \frac{\sin(2\pi c \mu)}{\pi c}.$$

分子分母的 $2i$ 与 $2\pi ic$ 里的 $2i$ 对消，剩 $\frac{\sin(2\pi\mu c)}{\pi c}$ 。

4 把 $c = C(\xi)$ 代回，得到

$$\int_{-\mu}^{\mu} e(\gamma C(\xi)) d\gamma = \frac{\sin(2\pi\mu C(\xi))}{\pi C(\xi)}.$$

这就是第②个等号。注意结果是个**纯实数**（虚部全消掉了）——很合理，因为 $J(\mu)$ 本是一个实积分。顺带一提，当 $C(\xi) \rightarrow 0$ 时，由 $\sin x \approx x$ 知 $\frac{\sin(2\pi\mu C)}{\pi C} \rightarrow 2\mu$ ，并不发散，所以被积函数在 $C = 0$ 处也是好的（可去）。

第③个等号：把盒子平移到原点（换元 $\xi = \xi^* + \eta$ ）

盒子 $\mathcal{B}$ 是 $|\xi_j - \xi_j^*| < \rho$ 。令**偏移量** $\eta = \xi - \xi^*$ ，即 $\eta_j = \xi_j - \xi_j^*$ 。那么：

- 积分区域从「以 ξ^* 为心的立方体」变成「以**原点**为心的立方体」 $|\eta_j| < \rho$ ，积分上下限统一成 $-\rho$ 到 ρ （这就是为什么出现 n 个 $\int_{-\rho}^{\rho}$ ）。
- 平移换元的**体积元不变**： $d\xi = d\eta$ （平移不缩放体积，雅可比行列式=1）。
- 被积函数里把 ξ 换成 $\xi^* + \eta$ 。

于是得到 (16.5) 的第三行。这一步纯粹是「把坐标原点搬到盒子中心」，让中心点变成 $\eta = \mathbf{0}$ ，方便下面做「在中心附近展开」。

$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ （**黑体 eta**，读「衣塔」）

新的积分变量，表示「离中心 ξ^* 的偏移」。 $\eta = \mathbf{0}$ 对应正中心。盒子条件变为 $|\eta_j| < \rho$ 。

$$\frac{\sin 2\pi\mu C}{\pi C}$$

第①步算出来的「Dirichlet 核」型被积函数。 μ 越大，它在 $C = 0$ 附近振荡越快、越集中，这正是后面取极限的关键。

5.2 第二步：把 C 在中心处展开成线性 + 高次

译文：对任意 η ，我们有

$$C(\xi^* + \eta) = c_1\eta_1 + \cdots + c_n\eta_n + P_2(\eta) + P_3(\eta), \quad (16.6)$$

这里 $P_2(\eta), P_3(\eta)$ 是关于 η 的 2 次和 3 次型。我们有

$$c_1 = \frac{\partial C}{\partial \xi_1}(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*) \neq 0.$$

不失一般性，我们可以假定 $c_1 = 1$ 。

(16.6) 是怎么来的——三次多项式的「泰勒展开」

把 $C(\xi^* + \eta)$ 当成 η 的函数展开。因为 C 是三次多项式，按 η 的次数从低到高整理，最多到 3 次，于是必然写成

$$C(\xi^* + \eta) = \underbrace{C(\xi^*)}_{0 \text{ 次: 常数}} + \underbrace{(c_1\eta_1 + \cdots + c_n\eta_n)}_{1 \text{ 次: 线性}} + \underbrace{P_2(\eta)}_{2 \text{ 次}} + \underbrace{P_3(\eta)}_{3 \text{ 次}}.$$

现在用上「中心是解」这件大事： $C(\xi^*) = 0$ （式 16.3），所以常数项消失，只剩 1、2、3 次三部分——这正是 (16.6)。可见「以解为中心」在这里直接帮我们抹掉了常数项，让 C 在中心附近从 0 开始，主导行为是线性项 $c_1\eta_1 + \cdots$ 。

系数 c_j 为什么等于偏导数

泰勒展开的一次项系数 = 在该点的偏导数。具体地， $c_j = \frac{\partial C}{\partial \xi_j}(\xi^*)$ ：把 η 里只有 η_j 微小变动、其余为 0，则 C 的变化率就是 $\partial C / \partial \xi_j$ ，这恰是 η_j 前的线性系数。所以

$$c_1 = \frac{\partial C}{\partial \xi_1}(\xi^*).$$

而我们专门选了非奇异解，并在第 4 节保证了 $\partial C / \partial \xi_1 \neq 0$ ，于是 $c_1 \neq 0$ 。
——前面所有挑选好解的苦功，就是为了此刻这一句 $c_1 \neq 0$ ：它保证线性项里 η_1 这一项真实存在，下一步才能把 η_1 解出来。

「不失一般性可设 $c_1 = 1$ 」——这步合法吗？

「不失一般性」(without loss of generality, 常缩写 WLOG) 意思是：通过一个不影响结论的简单调整，可以把问题化到一个更干净的特例，省去无谓的字母。这里的调整是**把 C 整体除以常数 c_1** （因为 $c_1 \neq 0$ ，可以除）。

1 令 $\tilde{C} = C/c_1$ 。方程 $C = 0$ 与 $\tilde{C} = 0$ 是同一条曲面（两边除以非零常数解集不变），所以中心 ξ^* 、盒子都不变。

2 $\tilde{C}$ 的一次项系数变成 c_j/c_1 ，其中第一个就是 $c_1/c_1 = 1$ 。

3 除以常数只会把整个积分 $J(\mu)$ 乘上一个固定正因子（且 $\sin /$ 的结构形式不变），不影响「极限存在且为正」这一结论。

所以为简洁起见，直接假定 $c_1 = 1$ ，线性项写成 $\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_n\eta_n$ 。

$c_1, \dots, c_n$

C 在中心 ξ^* 处对各变量的偏导数（梯度的分量），也是 (16.6) 中线性项的系数。已归一化使 $c_1 = 1$ 。

$P_2(\eta), P_3(\eta)$

展开式里 η 的 2 次、3 次型部分（高阶小量）。当 η 很小时，它们比线性项小得多 ($\eta^2, \eta^3 \ll \eta$)，是「次要修正」。

5.3 把 C 本身当新坐标 ζ ，并反解出 η_1

译文：对于 $|\eta| < \rho$ ，我们有 $|C(\xi^* + \eta)| < \sigma$ ，其中 $\sigma = \sigma(\rho)$ 随 ρ 而变小。令 $C(\xi^* + \eta) = \zeta$ 。那么，若 ρ 充分小，我们可以反演关系 (16.6)，把 η_1 用 $\eta_2, \dots, \eta_n$ 借助幂级数表示出来。这将是如下形式之一：

$$\eta_1 = \zeta - c_2\eta_2 - \dots - c_n\eta_n + P(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n),$$

其中 P 是一个至少从 2 次项开始的多重幂级数。

为什么 $|C| < \sigma$ ，且 σ 随 ρ 变小

在盒子里 $|\eta_j| < \rho$ 。代入 (16.6)， $C(\xi^* + \eta)$ 是 η 的（无常数项的）多项式，每一项至少含一个 η_j 因子，所以当所有 $|\eta_j| < \rho$ 时，每一项都被某个 ρ 的正次幂控制住。把它们加起来，存在一个上界 σ 使 $|C| < \sigma$ ；并且 $\rho \rightarrow 0$ 时这个上界 $\sigma \rightarrow 0$ 。记号 $\sigma = \sigma(\rho)$ 就是强调「 σ 是依赖 ρ 的、并随 ρ 一起变小」。直观：盒子越小，盒子里 C 的取值范围越贴近 0（因为中心处 $C = 0$ 且 C 连续）。

关键换元思想：让 $\zeta = C$ 当一个新坐标

这是全章最妙的一步，动机要讲清。被积函数 $\frac{\sin 2\pi\mu C}{\pi C}$ 只通过 C 的取值起作用——它只关心 C 等于多少，不关心 η 具体在哪。既然如此，何不干脆把 C 本身当成一个坐标轴？记

$$\zeta := C(\xi^* + \eta).$$

我们打算用新坐标组 $(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 替换旧坐标组 $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ ：保留 $\eta_2, \dots, \eta_n$ 不动，只把 η_1 换成 ζ 。这样积分里 $\sin /$ 那一团就变成只含 ζ 的干净函数 $\frac{\sin 2\pi\mu\zeta}{\pi\zeta}$ ，与其余变量分离开。要完成这个替换，必须能把 η_1 反解成 $(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 的函数——这正是下面「反演 (16.6)」要做的。

为什么能反解 η_1 ——隐函数 / 反函数定理

把 (16.6) (已设 $c_1 = 1$) 写成

$$\zeta = \eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_n\eta_n + P_2(\boldsymbol{\eta}) + P_3(\boldsymbol{\eta}).$$

这是一个关于 η_1 的方程。我们想从中解出 η_1 。关键观察：等式右边对 η_1 的偏导数在原点处是

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial \eta_1} \right|_{\boldsymbol{\eta}=0} = 1 \neq 0$$

(因为 η_1 前的系数是 1，而高次项 P_2, P_3 在原点的偏导为 0)。**反函数定理** (大学微积分) 说：只要某点处导数非零，函数在该点附近就局部可逆，可以把自变量反解出来，而且解还是光滑的 (这里甚至能写成幂级数)。所以在足够小的邻域 (ρ 充分小) 里，存在唯一的

$$\eta_1 = \eta_1(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n).$$

这就是「若 ρ 充分小，可反演 (16.6)」的严格依据。注意这里再次用到 $c_1 = 1 \neq 0$ ——非奇异性在此第三次救场。

反解的具体形状为什么是 $\eta_1 = \zeta - c_2\eta_2 - \cdots - c_n\eta_n + P(\dots)$

把 $\zeta = \eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_n\eta_n + (\text{高次})$ 里的 η_1 移项：

$$\eta_1 = \zeta - c_2\eta_2 - \cdots - c_n\eta_n - (\text{高次项}).$$

那些「高次项」 $P_2 + P_3$ 里也含 η_1 ，但可以用逐次代入 / 迭代的办法把里面的 η_1 不断用右边表达式替换，最终把所有 η_1 都消干净，得到一个只含 $(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 的幂级数。整理后这堆修正项记为 $P(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 。

为什么说 P 「至少从 2 次项开始」？因为 η_1 的线性主部已经被精确写成 $\zeta - c_2\eta_2 - \cdots - c_n\eta_n$ (它来自原式的线性部分)，剩下的修正全部来自原来的

2、3 次项，所以 P 里没有常数项、也没有一次项，最低是 2 次。这个事实下一步会用到（它保证 $\partial\eta_1/\partial\zeta$ 的修正在原点为 0）。

σ （读「sigma」，希腊字母）

盒子里 $|C|$ 的一个上界， $\sigma = \sigma(\rho)$ 随 $\rho \rightarrow 0$ 而 $\rightarrow 0$ 。它将成为新变量 ζ 的取值范围 $|\zeta| < \sigma$ 。

ζ （读「zeta」，希腊字母）

新坐标，定义为 $\zeta = C(\xi^* + \eta)$ ，即「 C 的当前取值」。它把被积函数变得只依赖一个变量。

$P(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n)$

反解 η_1 时出现的修正幂级数，最低次为 2，故在原点很小。

译文：于是

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial\zeta} = 1 + P_1(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n),$$

取 ρ 充分小，我们便能保证在 $|\eta_2| < \rho, \dots, |\eta_n| < \rho, |\zeta| < \sigma$ 上有 $|P_1| < 1/2$ 。

求 $\partial\eta_1/\partial\zeta$ 并控制误差 P_1

1 对 ζ 求偏导。把 $\eta_2, \dots, \eta_n$ 看作常数，对

$\eta_1 = \zeta - c_2\eta_2 - \dots - c_n\eta_n + P(\zeta, \dots)$ 关于 ζ 求偏导：常数 $-c_j\eta_j$ 项导数为 0， ζ 项导数为 1， P 项导数记为 $P_1 := \partial P/\partial\zeta$ 。于是

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial\zeta} = 1 + P_1(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n).$$

这里 $\partial\eta_1/\partial\zeta$ 正是后面换元要用的雅可比因子（一维方向上的「拉伸率」）。

- 2 误差为何小。 P 最低 2 次，对 ζ 求一次导后 $P_1 = \partial P / \partial \zeta$ 最低 1 次，所以在原点 $P_1(0, \dots, 0) = 0$ 。 P_1 又连续，于是只要把邻域取得足够小（ ρ 、 σ 足够小），就能让 P_1 离它在原点的值 0 不远，具体地保证

$$|P_1| < \frac{1}{2} \quad \text{在} \quad |\eta_2| < \rho, \dots, |\eta_n| < \rho, |\zeta| < \sigma \text{ 上.}$$

- 3 为什么偏要 1/2 这个阈值？因为这样 $\partial \eta_1 / \partial \zeta = 1 + P_1$ 就被夹在 $\frac{1}{2} < 1 + P_1 < \frac{3}{2}$ 之间——恒为正。这件事至关重要：它保证换元 $\eta_1 \leftrightarrow \zeta$ 是严格单调（一一对应、不折叠）的，雅可比不变号，换元才合法、积分才不会出现「正负抵消的虚假塌缩」。后面证 $V(0) > 0$ 也要用到 $1 + P_1 > \frac{1}{2} > 0$ 。这就是为何挑 1/2 而不是别的：它是「保证为正、又留出余量」的最省事阈值。

5.4 换元落地：得到经典形状 (16.7)

译文：在 (16.5) 中作从 η_1 到 ζ 的变量替换，我们得到

$$J(\mu) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{\sin 2\pi\mu\zeta}{\pi\zeta} V(\zeta) d\zeta, \quad (16.7)$$

其中

$$V(\zeta) = \int_{\mathcal{B}'} \{1 + P_1(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n)\} d\eta_2 \cdots d\eta_n,$$

这里 $\mathcal{B}'$ 表示 $(n-1)$ 维立方体 $|\eta_2| < \rho, \dots, |\eta_n| < \rho$ 中满足 $|\eta_1| < \rho$ 的那一部分，也就是满足

$$|\zeta - c_2\eta_2 - \cdots - c_n\eta_n + P(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n)| < \rho$$

的部分。

这一步把 n 重积分塌缩成「一重 $\times$ 权重」

(16.5) 是对 $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 的 n 重积分。我们只把其中的 η_1 换成 ζ ，其余 $\eta_2, \dots, \eta_n$ 不动。分两层看：

- 1 先对 η_1 那一层换元。固定 $\eta_2, \dots, \eta_n$ ，对内层那个关于 η_1 的积分做换元 $\eta_1 \rightarrow \zeta$ 。一维换元公式 $d\eta_1 = \frac{\partial \eta_1}{\partial \zeta} d\zeta = (1 + P_1) d\zeta$ 。同时被积函数里 $C = \zeta$ ，所以 $\frac{\sin 2\pi\mu C}{\pi C} = \frac{\sin 2\pi\mu\zeta}{\pi\zeta}$ 。于是内层变成

$$\int \frac{\sin 2\pi\mu\zeta}{\pi\zeta} (1 + P_1) d\zeta.$$

- 2 交换积分次序，提出只含 ζ 的因子。因为 $\frac{\sin 2\pi\mu\zeta}{\pi\zeta}$ 只依赖 ζ 、不依赖 $\eta_2, \dots, \eta_n$ ，可以把它提到对 $\eta_2, \dots, \eta_n$ 的积分外面。把对 $\eta_2, \dots, \eta_n$ 的那 $(n - 1)$ 重积分（连同权重 $1 + P_1$ ）单独打包成一个只依赖 ζ 的函数：

$$V(\zeta) := \int_{\mathcal{B}'} \{1 + P_1(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n)\} d\eta_2 \cdots d\eta_n.$$

$$\text{剩下对 } \zeta \text{ 的一重积分就是 (16.7): } J(\mu) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{\sin 2\pi\mu\zeta}{\pi\zeta} V(\zeta) d\zeta.$$

一句话总结：原来的 n 维积分被「拍扁」到 ζ 这一根轴上，每个 ζ 处的「厚度」就是 $V(\zeta)$ 。积分上下限变成 $|\zeta| < \sigma$ ，因为前面证过盒子里 $|C| = |\zeta| < \sigma$ 。

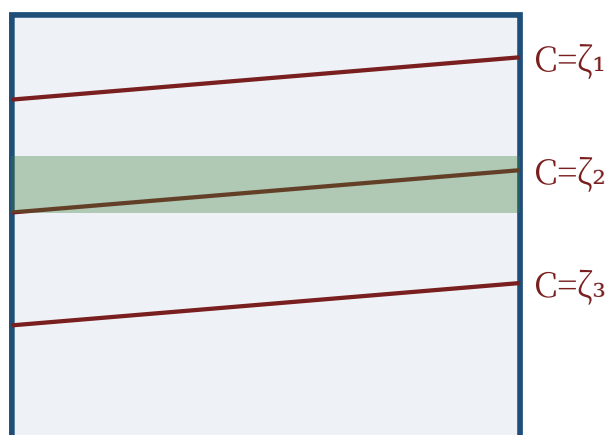
$V(\zeta)$ (读「V of zeta」)

权重 / 厚度函数：在固定 $C = \zeta$ 这张「等位切片」上，把 $(n - 1)$ 维横截面的体积（带权 $1 + P_1$ ）加起来得到的数。几何上 $V(\zeta) d\zeta$ 约等于盒子里满足 $|\zeta|$

$\mathcal{B}'$ (读「B prime」)

积分 $V(\zeta)$ 的区域: $(n-1)$ 维立方体 $|\eta_2| < \rho, \dots, |\eta_n| < \rho$ 中, 还要额外满足 $|\eta_1| < \rho$ (即反解出的 η_1 仍落在盒子里) 的那部分。把 η_1 的反解式代入, 这条件就是 $|\zeta - c_2\eta_2 - \dots - c_n\eta_n + P| < \rho$ 。它依赖 ζ , 所以切片形状随 ζ 变。

盒子 B (n 维)



绿色薄片: ζ 到 $\zeta+d\zeta$ 之间, 厚度 $\approx V(\zeta) \cdot d\zeta$

换元 $\zeta = C$ 的几何意义: 把盒子按 C 的等位面 (红线) 切成一片片。 $V(\zeta)$ 就是 $C = \zeta$ 这一片的横截面「面积 / 体积」(带权 $1 + P_1$)。积分 (16.7) 就是把所有切片沿 ζ 轴累加。

5.5 第三步: Dirichlet 核取极限 + 证 $V(0) > 0$, 收官

译文: 显然, 对于充分小的 $|\zeta|$, $V(\zeta)$ 是 ζ 的连续函数。同样容易看出, $V(\zeta)$ 是有界变差函数, 因为它在 ζ 的每个值处都有左、右导数, 且它们是有界的。因此, 把 Fourier 积分定理应用于 (16.7), 我们有

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} V(\mu) = V(0).$$

先纠正一个原书笔误 书里这行写的是 $\lim_{\mu \rightarrow \infty} V(\mu) = V(0)$, 但按上下文, 真正取极限的是整个积分 $J(\mu)$, 正确含义是

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} J(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{\sin 2\pi\mu\zeta}{\pi\zeta} V(\zeta) d\zeta = V(0).$$

(这是原文的一处印刷疏漏，我们按它本来的意思来理解。) 下面解释为什么这个极限成立。

「 V 连续」——为什么显然

$V(\zeta) = \int_{B'} (1 + P_1) d\eta_2 \cdots d\eta_n$ 。被积函数 $1 + P_1$ 对 ζ 连续，积分区域 B' 的边界 $|\eta_1| = |\zeta - c_2\eta_2 - \cdots + P| = \rho$ 也随 ζ 连续移动。「连续地变形的区域上、对连续函数积分」，结果对 ζ 连续。直观： ζ 稍微变一点，切片只挪一点点，厚度 $V(\zeta)$ 也只变一点点。

「有界变差」是什么·为什么需要它

有界变差函数 (function of bounded variation)：粗略地说，就是「上上下下的总波动量有限」的函数——把它在区间上所有的涨跌幅加起来是个有限数，不会无限次剧烈抖动。直观例子：单调函数、分段单调函数都是有界变差；而像 $\sin(1/x)$ 在 0 附近那样无限次振荡的就不是。

书里给的判据： V 在每点都有有限的左导数和右导数（左右两侧的变化率都存在且有界），这样的函数不会突然无限抖动，因而是有界变差。为什么 V 满足？因为 $V(\zeta)$ 由「切片厚度」给出， ζ 变动时切片边界以有限速度平移，厚度的变化率有限，故左右导数有界。

为什么非要有界变差？ 因为下一步要用的 Fourier 积分定理 (Dirichlet 定理) 正是对「有界变差」这一类函数才保证收敛到 $V(0)$ 。它是定理的入场券，少了它极限不一定成立。

Fourier 积分定理 / Dirichlet 核：极限为什么等于 $V(0)$

核心是这个函数 (叫 Dirichlet 核)：

$$K_{\mu}(\zeta) := \frac{\sin 2\pi\mu\zeta}{\pi\zeta}.$$

它有两条性质：

1 总质量为 1。经典积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\mu\zeta}{\pi\zeta} d\zeta = 1$ （对任意 $\mu > 0$ 都成立，换元后就是著名的 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$ ）。

2 越来越尖、越来越集中在 $\zeta = 0$ 。当 $\mu \rightarrow \infty$ ， $\sin 2\pi\mu\zeta$ 振荡极快，在远离 0 的地方正负迅速抵消、积分趋于 0；只有在 $\zeta = 0$ 的极小邻域里它来不及抵消，质量全堆在那里。也就是说 K_{μ} 趋近一个「 δ 函数」（无穷高、无穷窄、面积为 1 的尖钉）。

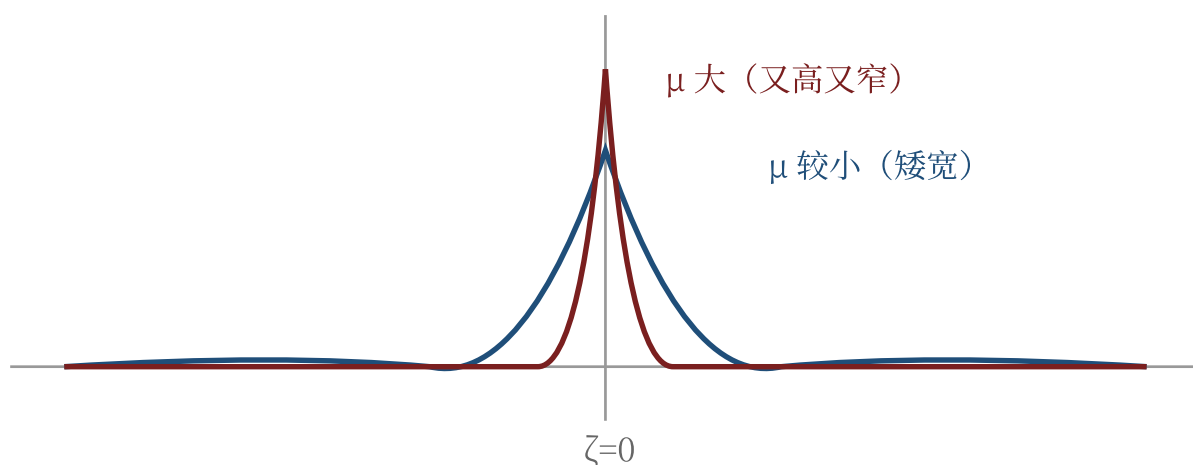
把这样的尖钉乘上一个温和函数 $V(\zeta)$ 再积分，效果就是把 V 在尖钉所在处（ $\zeta = 0$ ）的值挑出来：

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} K_{\mu}(\zeta) V(\zeta) d\zeta \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} V(0).$$

这正是 **Fourier 积分定理**（也称 Dirichlet–Jordan 收敛定理）的结论：当 V 在 0 处连续且为有界变差时，上式极限恰为 $V(0)$ 。所以

$$J(\mu) \rightarrow V(0) =: J_0.$$

至此我们证明了「极限存在」，并且 $J_0 = V(0)$ 。还差最后一句： $V(0)$ 必须 > 0 。



面积始终为 1; $\mu \rightarrow \infty$ 时变成集中在 0 的尖钉, 把 $V(0)$ 挑出来

Dirichlet 核 $\frac{\sin 2\pi\mu\zeta}{\pi\zeta}$: μ 越大越尖, 面积恒为 1。乘上 $V(\zeta)$ 积分, 等于「采样」出 $V(0)$ 。这是 $J(\mu) \rightarrow V(0)$ 的本质。

译文: 现在 $V(0)$ 是一个正数, 因为立方体 $\mathcal{B}'$ 包含任意充分小的以原点为中心的 $(n-1)$ 维立方体, 而在这样一个立方体中我们有 $1 + P_1 > 1/2$ 。这就证明了结论。■

最后一锤: 为什么 $V(0) > 0$

回到定义 $V(0) = \int_{\mathcal{B}'_0} (1 + P_1(0, \eta_2, \dots, \eta_n)) d\eta_2 \cdots d\eta_n$, 其中 $\mathcal{B}'_0$ 是 $\zeta = 0$ 时的切片区域。要证它是正数, 靠两件事:

1 被积函数处处 $> \frac{1}{2} > 0$ 。由 5.3 第 3 步, 在小邻域里 $|P_1| < \frac{1}{2}$, 所以 $1 + P_1 > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$ 。被积函数恒正。

2 积分区域有正体积。当 $\zeta = 0$ 时, 切片条件是 $|-c_2\eta_2 - \cdots - c_n\eta_n + P| < \rho$, 它在原点 $\eta_2 = \cdots = \eta_n = 0$ 处取值 0 ($< \rho$) 且连续成立, 所以 $\mathcal{B}'_0$ 包含一个以原点为心的、充分小的 $(n-1)$ 维小立方体, 其体积是正数。

「正函数在正体积区域上的积分」必为正:

$$V(0) = \int_{B'_0} (1 + P_1) d\eta_2 \cdots d\eta_n > \frac{1}{2} \times (\text{正体积}) > 0.$$

于是 $J_0 = V(0) > 0$ 。两件事——极限存在（ $= V(0)$ ）且为正（ $V(0) > 0$ ）——全部落实，引理 16.1 证毕。■

6 回头看：这一章到底做成了什么

一页总结

1 对象。奇异积分 $J(\mu) = \int_{-\mu}^{\mu} \int_{\mathcal{B}} e(\gamma C(\xi)) d\xi d\gamma$ ，是圆法主项里度量「 $C = 0$ 实数解稠密程度」的连续因子。

2 选址。盒子 $\mathcal{B}$ 以一个非奇异、坐标全非零的实解 ξ^* 为中心；这种好解的存在性用「一元三次必有实根 + 判别式控制重根」构造性地证明。

3 三步化简。(1) 对 γ 积分，用 $\int_{-\mu}^{\mu} e(\gamma C) d\gamma = \frac{\sin 2\pi\mu C}{\pi C}$ 拍扁成一重；(2) 以 $\zeta = C$ 为新坐标反解 η_1 ，把 n 重积分塌缩成 (16.7) 的「Dirichlet 核 $\times$ 厚度 $V(\zeta)$ 」；(3) Fourier 积分定理给出 $J(\mu) \rightarrow V(0)$ 。

4 正性。因为 $1 + P_1 > \frac{1}{2} > 0$ 且切片含一个正体积小立方体，故 $J_0 = V(0) > 0$ 。

5 意义。 $J_0 > 0$ 这一块拼图，连同下一章的奇异级数 $\mathfrak{S} > 0$ ，共同保证 $\mathcal{N}(P)$ 的渐近主项不为零，从而 $\mathcal{N}(P) \rightarrow \infty$ ——三次型方程有

无穷多组整数解。

核心直觉：奇异积分之所以是正数，根子在「我们把盒子骑在了曲面 $C = 0$ 的一个光滑点上」。光滑点附近曲面像一张平面，盒子被它切出厚度均匀、不退化的切片，于是「实数解的局部密度」 $V(0)$ 实打实地大于零。挑非奇异解的全部苦功，最终都浓缩进 $c_1 \neq 0$ 、 $1 + P_1 > \frac{1}{2}$ 这两处不等号里。

返回 [全书目录](#)