

DAVENPORT · ANALYTIC METHODS FOR DIOPHANTINE
EQUATIONS

前言与目录

Foreword, Contents & Editorial Preface

书名页信息 Title page & publication data

《丢番图方程与丢番图不等式的解析方法》(Analytic Methods for Diophantine Equations and Diophantine Inequalities), 第二版 (Second edition)。

作者: H. 达文波特 (Harold Davenport)。本版由 T. D. 布朗宁 (T. D. Browning, 牛津大学) 编辑并整理出版。出版者: 剑桥大学出版社 (Cambridge University Press), 收入“剑桥数学文库” (Cambridge Mathematical Library) 丛书。

封底简介

哈罗德·达文波特 (Harold Davenport) 是二十世纪真正伟大的数学家之一。本书基于他于 1960 年代初在密歇根大学 (University of Michigan) 所作的讲座, 主题是运用解析方法研究丢番图方程与丢番图不等式的整数解。它为数论中一个历久弥新的领域提供了极佳的入门——这一领域在本书最初问世时被广泛研究, 至今依然如此。全书有三大主题: 华林问题 (Waring's problem) 以及对角型对整数的表示; 多变量型方程组的整数可解性; 以及对角不等式的整数可解性。

为本书第二版新增了一篇内容详尽的前言, 由三位顶尖专家分别描述了相关领域的现代背景与最新进展; 同时还补充了一份完整的参考文献。

版权页信息

剑桥大学出版社 (Cambridge University Press): 剑桥、纽约、墨尔本、马德里、开普敦、新加坡、圣保罗。社址: The Edinburgh Building, Cambridge CB2 2RU, UK; 在美国由剑桥大学出版社纽约分社出版。网址: www.cambridge.org; 本书页面信息: www.cambridge.org/9780521605830。

© 哈罗德·达文波特遗产管理委员会 (Estate of Harold Davenport) 1963, 2005。

本书受版权保护。除法定例外情形及相关集体许可协议规定外, 未经剑桥大学出版社书面许可, 不得复制本书任何部分。本书于 2005 年首次以印刷形式出版。

ISBN-13 978-0-521-60583-0 平装; ISBN-10 0-521-60583-0 平装。

对于本书所引用的外部或第三方网站的网址, 剑桥大学出版社不对其持续存在性或准确性负责, 亦不保证此类网站上的任何内容当前或将来准确或适当。第一版最初由 Campus Publishers 于 1963 年出版。

目录Contents

- 前言 (Foreword) 第 vii 页
 - 华林问题 (Waring's problem), R. C. Vaughan 撰 vii
 - 多变量型 (Forms in many variables), D. R. Heath-Brown 撰 xi
 - 丢番图不等式 (Diophantine inequalities), D. E. Freeman 撰 xv
- 编者序 (Editorial preface) xix
- 1 引论 (Introduction) 1
- 2 华林问题: 历史 (Waring's problem: history) 3
- 3 外尔不等式与华氏不等式 (Weyl's inequality and Hua's inequality) 7

- 4 华林问题：渐近公式 (Waring's problem: the asymptotic formula) 15
- 5 华林问题：奇异级数 (Waring's problem: the singular series) 24
- 6 奇异级数 (续) (The singular series continued) 33
- 7 方程 $c_1x_1^k + \cdots + c_sx_s^k = N$ (The equation $c_1x_1^k + \cdots + c_sx_s^k = N$) 39
- 8 方程 $c_1x_1^k + \cdots + c_sx_s^k = 0$ (The equation $c_1x_1^k + \cdots + c_sx_s^k = 0$) 45
- 9 华林问题：数 $G(k)$ (Waring's problem: the number $G(k)$) 51
- 10 方程 $c_1x_1^k + \cdots + c_sx_s^k = 0$ (再论) (The equation $c_1x_1^k + \cdots + c_sx_s^k = 0$ again) 63
- 11 一般齐次方程：伯奇定理 (General homogeneous equations: Birch's theorem) 67
- 12 数的几何 (The geometry of numbers) 75
- 13 三次型 (Cubic forms) 85
- 14 三次型：双线性方程 (Cubic forms: bilinear equations) 92
- 15 三次型：劣弧与优弧 (Cubic forms: minor arcs and major arcs) 99
- 16 三次型：奇异积分 (Cubic forms: the singular integral) 104
- 17 三次型：奇异级数 (Cubic forms: the singular series) 107
- 18 三次型： p -进问题 (Cubic forms: the p -adic problem) 111
- 19 高次齐次方程 (Homogeneous equations of higher degree) 120
- 20 一个丢番图不等式 (A Diophantine inequality) 125
- 参考文献 (References) 134
- 索引 (Index) 139

前言：华林问题（第 1–10 章） Foreword — Waring's problem: Chapters 1–10

撰文：R. C. Vaughan（宾夕法尼亚州立大学，Pennsylvania State University）

达文波特撰写这些讲义之时，自达文波特与维诺格拉多夫（Vinogradov）约四分之一世纪以前的重要工作以来，华林问题上的进展寥寥；其主要旨趣在于报告后面各章所述、关于型（forms）的更晚近的工作。事实上，至少就华林问题而言，当时普遍存在一种看法：哈代–李特尔伍德方法（Hardy–Littlewood method）合理可得的一切结论都已被发掘殆尽，该方法基本上已经被用尽。此外，关于华林问题的材料一般也并非意在反映前沿水平，而仅是对哈代–李特尔伍德方法相当简明的引论——出自一位大师之手，几无赘述——其后可在后面各章中加以发展，以服务于零的一般整型，尤其是三次型，的表示研究之需。书中没有论及达文波特本人的基础性工作，即 $G(4) = 16$ （达文波特 [18]）、 $G(5) \leq 23$ 、 $G(6) \leq 36$ （达文波特 [19]），也没有论及维诺格拉多夫 [94] 关于大 k 时 $G(k) \leq 2k \log k + o(k \log k)$ 的结果，或达文波特关于几乎所有自然数都是四个正立方数之和的证明 [17]。在更技术性的层面上，书中也未尝试给出引理 4.2 与 9.2 的更精细形式，即对优弧上母函数 $T(\alpha)$ 的估计，例如达文波特与海尔布朗（Heilbronn）[25] 或华罗庚 [50] 所给出的那些估计——尽管这类精细化在应用中可能极为有用。

在过去二十年里，华林问题取得了相当多的进展。受哈代与李特尔伍德、达文波特、维诺格拉多夫等人研究中某些思想之启发，人们发展出了一些极为灵活的方法，得以在保留早期方法所引入的诸多繁难细节的同时（取得突破）。这些重要思想中某些萌芽的初露端倪，在引理 9.4 与 9.5 中可见一斑。

当 $s \geq 2^k + 1$ 时，定理 4.1 所建立的、将大自然数 n 表为至多 s 个 k 次幂之和的表法数的渐近公式，对 $3 \leq k \leq 10$ 曾是前沿水平；但对更大的 k ，维诺格拉多夫所采用的方法更为优越（见 Vaughan [86] 定理 5.4）。目前的进展状况是：已知渐近公式在 $s \geq 2^k$ （ $k = 3, 4, 5$ ）（Vaughan [82, 84]）、 $s \geq 7 \cdot 2^{k-3}$ （ $k = 6, 7, 8$ ）（Boklan [8]，沿用 Heath-Brown [43]），以及 $s \geq s_1(k)$ （其中 $s_1(k) = k^2(\log k + \log \log k + O(1))$ ， $k \geq 9$ ）（Ford [32]）时成立。第 3 章中的注（Note）里关于 $k = 3$ 情形的讨论至今仍有现实意义。尽管八个立方数之

和的渐近公式现已确立，但在指数 $2 < m < 4$ 时经典的凸性界（convexity bound）并未得到改进。Vaughan [82] 论证的核心极为精微，仅能导出

$$\int_{\mathfrak{m}} |T(\alpha)|^8 d\alpha \ll P^5 (\log P)^{-\gamma}$$

其中 γ 为某正常数， $\mathfrak{m}$ 为适当选取的劣弧集合。然而 Hooley [47] 在某个哈塞-韦伊 L -函数（Hasse-Weil L -function）的（尚未证明的）黎曼假设之下证明了

$$\int_{\mathfrak{m}} |T(\alpha)|^6 d\alpha \ll P^{3+\varepsilon}$$

这进而蕴含七个立方数之和的渐近公式。遗憾的是，目前甚至连该 L -函数是否能解析延拓到临界带内都尚不清楚。

对于 $G(k)$ ，我们目前已知的最佳结果有： $G(3) \leq 7$ （Linnik [57, 59]）、 $G(4) = 16$ （达文波特 [18]）、 $G(5) \leq 17$ 、 $G(7) \leq 33$ （Vaughan and Wooley [89]）、 $G(6) \leq 21$ （Vaughan and Wooley [88]）、 $G(8) \leq 42$ （Vaughan and Wooley [87]）、 $G(9) \leq 50$ 、 $G(11) \leq 59$ 、 $G(12) \leq 76$ 、 $G(13) \leq 84$ 、 $G(14) \leq 92$ 、 $G(15) \leq 100$ 、 $G(16) \leq 109$ 、 $G(17) \leq 117$ 、 $G(18) \leq 125$ 、 $G(19) \leq 134$ 、 $G(20) \leq 142$ （Vaughan and Wooley [90]），以及一般地 $G(k) \leq s_2(k)$ ，其中 $s_2(k) = k(\log k + \log \log k + O(1))$ （Wooley [98]）。设 $G^\#(4)$ 表示满足如下性质的最小正整数 s ：只要 $1 \leq r \leq s$ ，模 16 余 r 的剩余类中每个充分大的 n 都是 s 个四次幂之和。事实上，达文波特曾证明 $G^\#(4) \leq 14$ ，而我们现在能证明（Vaughan [85]） $G^\#(4) \leq 12$ 。林尼克（Linnik）关于立方数华林问题的工作并不使用哈代-李特尔伍德方法，而是基于三元二次型理论。

沃森（Watson）[95] 给出了一个类似但更简单的证明。然而这些证明所给出的关于七个立方数之和表法数的信息相对较弱。作为晚近进展的一部分，我们现在已有通过哈代-李特尔伍德方法（例如 Vaughan [85]）得到的证明，它们给出了表法数的期望正确数量级的下界。对于 $G(k)$ 的正确值应当是多少，达文波特未给出任何提示。最简单的猜测是

$$G(k) = \max\{k + 1, \Gamma(k)\}$$

其中 $\Gamma(k)$ 的定义见定理 5.1 之前那一段。这将蕴含：当 $k \geq 3$ 时，若 $k = 2^l$ 则 $G(k) = 4k$ ；而当 $k \neq 2^l$ 时 $k + 1 \leq G(k) \leq \frac{3}{2}k$ 。

关于引理 9.2 以及该证明之后的注（Note），我们现在已知：在更弱的假设 $(q, a) = 1$ 、 $q|\beta| \leq \frac{1}{2k}P^{1-k}$ 、 $\alpha = \beta + a/q$ 之下，我们有更强的估计

$$T(\alpha) = q^{-1}S_{a,q}I(\beta) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

而且仅在假设 $(q, a) = 1$ 之下，我们就有

$$T(\alpha) = q^{-1}S_{a,q}I(\beta) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(1 + P^k|\beta|)^{\frac{1}{2}}).$$

见 Vaughan [86] 定理 4.1。后一结果使得我们能够对立方数情形作出处理，其中所有的弧都是优弧。

关于哈代–李特尔伍德方法应用于华林问题的现代入门及一些较晚近进展，见 Vaughan [86]；关于华林问题的综述，见 Vaughan and Wooley [91]。

第 7 章讨论的是：给定一个自然数序列 $\{c_j\}$ ，方程

$$c_1x_1^k + \cdots + c_sx_s^k = N \tag{1}$$

对大自然数 N 的可解性。这实际上是第 8 章与第 10 章的预热。对于一个无穷的 N 集合，可能不存在解，然而 s 须取多大方有解，其障碍纯粹是局部的。为处理华林问题而发展出的哈代–李特尔伍德方法的各种形式，都可以方便地调整到这一稍微更一般的情形；在对 s 加上相应条件后，便能得到对所数解的个数的近似公式。这将对任意大的、其奇异级数有界离 0 的 N ，给出解的个数的一个正下界。

达文波特简要勾勒了为使方法适应这一情形而须对论证作出的细微改动，本章其余部分则致力于证明：上述关于奇异级数的条件，本质上等价于所期望的局部可解性条件。

在第 8 章与第 10 章中，达文波特将该方法调整以处理

$$c_1 x_1^k + \cdots + c_s x_s^k = 0 \quad (2)$$

此时 c_j 可为整数，且当 k 为偶数时不必全部同号。当然此方程总有解，因此主要旨趣在于确立存在并非所有 x_j 都为 0 的整数解。这可以视为本讲义主要关切的第一个特例，即研究一般型及型方程组对 0 的非平凡表示。在第 8 章中，前几章发展的哈代–李特尔伍德方法之最简单版本被适当地加以调整；这要求 s 取相当大的值方能保证有解。在第 10 章中，借助第 9 章处理华林问题所用的维诺格拉多夫论证之变体，这一要求得到了一定程度的放宽。尽管第 10 章的论证相对简单，但从哲学角度看它存在缺陷：它和方程 (1) 的局部可解性一样，需要讨论当 N 非零时方程 (2) 的局部可解性——而这当然本不应当需要。这本可避免，尽管会带来一些细节上的复杂。为保证 (2) 有非平凡解所需的 s 之大小问题，本身也有其独立的意义：达文波特与刘易斯 (Lewis) [27] 曾证明 $k^2 + 1$ 个变量足以使奇异级数有界离 0，而当 $k + 1$ 为素数时，存在 k^2 个变量却无非平凡解的方程。他们还借助哈代–李特尔伍德方法证明：当 $s \geq k^2 + 1$ 且 $k \leq 6$ 或 $k \geq 18$ 时，(2) 可解。后来 Vaughan [81] ($11 \leq k \leq 17$)、[83] ($7 \leq k \leq 9$) 与 [85] ($k = 10$) 消除了这一间隙。当将与华林问题相关的 Vaughan 与 Wooley 方法加以调整后可以表明：只要相应的奇异级数有界离 0（这本质上等价于局部可解性条件），所需变量数远少于此即可保证 (2) 有非平凡解。

在后面各章中，哈代–李特尔伍德方法被以各种、有时相当精巧的方式加以调整。然而，前 10 章主要结果被直接应用的唯一之处，是第 11 章伯奇定理 (Birch's theorem) 证明中对定理 8.1 (或定理 10.1) 的使用。后来伯奇 (Birch) [7] 给出了一个完全初等的证明，它部分基于林尼克 (Linnik) [58] 的方法，证明了一个与定理 8.1 类似、可取而代之的结果。

前言：多变量型 (第 11–19 章) Foreword — Forms in many variables: Chapters 11–19

撰文：D. R. Heath-Brown (牛津大学, Oxford University)

设 $F(x_1, \dots, x_n)$ 为一个整系数的 d 次型。当 $d \geq 3$ 时，方程 $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ 是否有非平凡整数解的问题极为自然、极为一般，也极为困难。然而对二次型，哈塞-闵可夫斯基定理（Hasse-Minkowski Theorem）给出了完整答案：它断言非平凡解存在，当且仅当在 $\mathbb{R}$ 中以及在每个 p -进域 $\mathbb{Q}_p$ 中都存在这样的解。对于更高次的型，已知这一结论不成立，正如塞尔默（Selmer）的例子

$$3x_1^3 + 4x_2^3 + 5x_3^3 = 0$$

所表明的那样。尽管如此，仍有希望：若变量数不太小，我们应当依然拥有某种哈塞-闵可夫斯基定理那样的“局部到整体”（local-to-global）原理。

事实证明：若变量数相对于次数足够大，则 p -进条件会自动成立。这是布劳尔（Brauer）[9] 所证明的，其论证构成了处理此类问题的第一个一般方法。其攻击路线采用多重嵌套归纳，因而所需的变量数极大。阿廷（Artin）曾猜测 $d^2 + 1$ 个变量总是足够的——人们容易构造出 d^2 个变量的型，其 p -进解平凡。然而其后人们发现了许多反例。其中第一个由特尔贾尼安（Terjanian）[80] 给出，涉及一个 18 个变量的四次型，它没有非平凡的 2-进解。目前尚无涉及素数次型的已知反例，在这种情形下，阿廷猜想是否成立仍是一个未决问题。

对于 p -进问题，布劳尔的归纳方法之外尚有种种替代途径。达文波特在第 18 章给出了其中之一，针对 $d = 3$ 这一最简单的情形，确立了当 $n \geq 10$ 时 p -进解的存在性。对于 $d \geq 4$ ，此类途径仅在 p 足够大时方才奏效。例如 Leep 与 Yeomans [55] 证明了对 $d = 5$ ， $p \geq 47$ 即足够。在一般情形下，阿克斯（Ax）与科亨（Kochen）[1] 证明了：当 p 相对于 d 足够大时， $d^2 + 1$ 个变量总足以解决 p -进问题。阿克斯-科亨的证明因其使用数理逻辑方法而引人注目。对于小素数，似乎需要另辟蹊径，而 Wooley [100] 重新审视了布劳尔归纳途径，从而确立了 $d^{2^d} + 1$ 个变量对每个域 $\mathbb{Q}_p$ 都足够。在 $d = 4$ 与 $d = 5$ 的情形得到合理大小的界（比如 1000 以下），仍是一个重要的未决问题。

型在 $\mathbb{Q}$ 上（而非 $\mathbb{Q}_p$ 上）的问题则截然不同。对于偶数次的型，不存在能保证非平凡整数解存在的 n 值，正如例子

$$x_1^d + \cdots + x_n^d = 0$$

所示。因此布劳尔原来的归纳论证不能应用于 $\mathbb{Q}$ ，因为它涉及对次数的归纳。然而伯奇（Birch）[5] 能够将这一归纳途径仅就奇数次的型加以调整，从而证明：对任意奇整数 $d \geq 1$ ，存在相应的 $n(d)$ ，使得 $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ 在 $n \geq n(d)$ 时总有非平凡解。这一工作由达文波特在第 11 章中加以描述。在 Vaughan [86]（第 9 章）一书中现已有更流畅的论述。尽管伯奇工作所产生的 $n(d)$ 值大到无法写出，Wooley [99] 通过对伯奇途径的仔细调整，给出了更合理的估计。

达文波特本人对该领域的一大贡献，是借助圆法（circle method）对三次型的攻关。外尔方法（Weyl's method）的自然应用——如第 13 章所述——会导出一个涉及双线性型的丢番图不等式组；这一背景下的关键结果是引理 13.2。借助数的几何（geometry of numbers）的技巧，达文波特得以将这些不等式转化为方程。在他关于此主题的头两篇论文 [20, 21] 中，这些方程被用来推出 F 必表示一个形如 $a_1 x_1^3 + F'(x_2, \dots, x_m)$ （对某 $m < n$ ）的型。这一过程相当浪费，因为有 $n - m$ 个变量被实际地舍弃了。通过反复应用上述原理，达文波特得以将考虑归结为对角型。达文波特关于此主题的第三篇论文 [22] 以一种更几何化的方式处理双线性方程，这一途径效率高得多，因为没有变量被浪费。这第三种方法的直接应用表明：对任意 17 个或更多变量的三次型 $F = 0$ 有非平凡整数解，这正是定理 18.1 给出的结果。然而在 [22] 中通过一处轻微的精细化表明 16 个变量即足够。或许值得强调一下该证明那略显不寻常的逻辑结构。

其主要目标是为边长为 P 的方盒中解的个数证明一个渐近公式。达文波特达成了这一点，前提是上述双线性方程的解的个数增长不太快。处理后一问题的论证导向两种可能：要么双线性方程的解的个数确实得到适当控制，要么原三次型出于几何原因而有非平凡整数零点。无论哪种情形，三次型都有非平凡整数零点。所有这一切的一个推论是：人们并非在每种情形下都能得到渐近公式。型

$$x_1^3 + x_2(x_3^2 + \cdots + x_n^2)$$

在 $x_1 = x_2 = 0$ 时恒为零，因此在边长为 P 的方盒中有 $\gg P^{n-2}$ 个解。这个例子表明：人们一般不能指望得到与定理 17.1 相关联的那类渐近公式。

16 个变量的结果可以说是达文波特最精致的成就之一，而要证明（比如说）15 个变量实际上就已足够，至今仍是一个未决挑战。达文波特的途径被施密特（Schmidt）[77] 大大推广，从而能应用于任意次数的型方程组。对于单个型 $F(x_1, \dots, x_n)$ ，结果可借助不变量 $h(F)$ 来表述， $h(F)$ 定义为使得可以写成

$$F(\mathbf{x}) = G_1(\mathbf{x})H_1(\mathbf{x}) + \cdots + G_h(\mathbf{x})H_h(\mathbf{x})$$

的最小整数 h ，其中 G_i, H_i 为系数有理的非常数型。考察达文波特关于 16 变量三次型的论证便可确立：对任意满足 $h(F) \geq 16$ 的三次型 F ，标准的哈代–李特尔伍德渐近公式成立。当 $h(F) \leq 15$ 且 $n \geq 16$ 时，型 F 仍有非平凡整数零点，因为人们可以取诸 $H_i(\mathbf{x})$ 为线性型，并使用 $H_1, \dots, H_h$ 的一个公共零点。在他的推广中，施密特能够得到一个明确的函数 $n(d)$ ，使得对任意满足 $h(F) \geq n(d)$ 的 d 次型，哈代–李特尔伍德公式成立。为处理那些 $h(F) < n(d)$ 的型，人们被引向一个涉及型方程组的归纳论证。于是，当人们从单个 $d = 5$ 次型出发时，便想了解三次型方程组的零点。在这方面，施密特在一篇单独的研究 [76] 中证明：一个整系数三次型方程组若至少有 $(10r)^5$ 个变量，则有非平凡整数零点。

达文波特的结果还被普利桑兹（Pleasant）[67] 在另一方向上加以推广，他证明：若型 F 的系数以及解 $(x_1, \dots, x_n)$ 被允许位于一个代数数域中，则结果仍然成立。在这一更广的背景下，16 个变量仍然足够。

若假设型 F 非奇异（这是通有情形），则可以证明（Heath-Brown [42]）10 个变量即足够。这里 10 这个数是最优的，因为存在 9 个变量、无非平凡 p -进零点的型。然而 Hooley [45] 锐化了上述结果，对 $n \geq 9$ 个变量的非奇异三次型确立了局部到整体原理。这些工作使用哈代–李特尔伍德方法，但不使用外尔不等式，而是依赖泊松求和公式（Poisson summation formula）以及对“完整”指数和（complete exponential sums）的估计。涉及非奇异型的完整指数和可借助德利涅（Deligne）关于有限域上簇的黎曼假设极为高效地加以估计，但随着奇异轨迹维数的增长，这些方法的效力会下降。德利涅的界能处理素数模或无平方因子模的和，但素数幂模的和仍是一个相当大的难题。[42] 中对这些和的处理所用的方法，恰与达文波特 [22] 所遇到的相同，但由于 F 此时是非奇异的，故可有利地运用伯奇 [6] 的技巧。Heath-Brown [42] 在适当区域内为解的个数确立了一个渐近

公式。然而 Hooley [45] 中的论证结构与达文波特的有些类似，即人们只能在某个几何条件下得到渐近公式。当该条件失效时，出于其他原因仍有整数点存在。（这一缺陷后来被 Hooley [46] 绕过。）以其最简单的形式，上述方法可处理 13 个或更多变量的非奇异三次型。然而借助克卢斯特曼（Kloosterman）对圆法的精细化，这可降至 10。为处理 9 个变量的型，Hooley 采用了一种明显更精微的分析，旨在当考虑边长为 P 的方盒中的点时，仅节省一个 $\log P$ 的幂次。

伯奇 [6] 的工作（在第 19 章中作了概述）通过观察它如何应用于单个型 F 而最容易理解。当 F 非奇异时，只要 $n > (d-1)2^d$ （且奇异级数与奇异积分为正），伯奇便能确立一个渐近公式。对 $d=3$ ，这弱于 Hooley [45] 的结果，但该方法对任意 d 值都奏效。事实上，其后的研究未能就任何 $d > 3$ 改进伯奇的结果。伯奇的论证基于外尔不等式，并导出一个与达文波特工作中的双线性方程类似的多重线性方程组。这些方程用一种不同于达文波特所用的技巧来处理——达文波特的技巧更简单、几何意味更明显，但需要关于 F 之奇异点的信息。

前言：丢番图不等式（第 20 章）Foreword — Diophantine inequalities: Chapter 20

撰文：D. E. Freeman（卡尔顿大学，Carleton University）

在最后一章中，达文波特阐述了他与海尔布朗（Heilbronn）1946 年合作的开创性工作 [26]。他们展示了如何调整哈代–李特尔伍德方法，使之能在丢番图不等式上产生结果。自他们的技巧问世以来，已用该技巧（现今通常称为达文波特–海尔布朗方法，Davenport–Heilbronn method）证明了大量结果。

设 s 为满足 $s \geq 5$ 的整数， $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 为实数，它们不全同号，且不全成有理数之比。本章内容是一个证明，表明：给定任意正实数 C ，存在丢番图不等式

$$|\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_s x_s^2| < C \tag{3}$$

的非平凡整数解 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$ 。正如达文波特所指出的，该结果可直接推广到将平方替换为 k 次幂、且变量数至少为 $2^k + 1$ 的情形。若 k 为奇数，则同号条件当然不必要。

证明是哈代–李特尔伍德方法的一个巧妙改造。人们对某个大正数 P 估计 (3) 中满足 $|x_i| \leq P$ 的整数解 x_i 的个数。这里不像哈代–李特尔伍德方法那样在一个单位区间上积分，而是在整条实轴上对一个适当的衰减核 (decaying kernel) 积分。这里没有多个优弧，主要贡献来自以零为中心的一个区间，而最难界定的区域则由一部分中等大小的数构成。处理后一区域时，要用到诸比值之一为无理数这一假设。

在讲义中，达文波特猜测 (3) 即便对 $s \geq 3$ 也非平凡可解；他还在另一处评论中指出，一个自然的问题是该结果能否推广到不必为对角型的不定二次型情形，并讨论了伯奇、达文波特与里多特 (Ridout) 的某些工作 (见 [29])。事实上，马古利斯 (Margulis) [60] 对这两个问题都给出了肯定回答，确立了

$$|Q(x_1, \dots, x_s)| < \varepsilon$$

对一般不定二次型 $Q(\mathbf{x})$ 、任意 $\varepsilon > 0$ (假设 $s \geq 3$ 且 Q 的系数不全成有理数之比) 的非平凡可解性。这确立了奥本海姆猜想 (Oppenheim conjecture)，因为它蕴含此类型在整数点处的值在实轴上稠密。我们注意到，马古利斯的证明所用的技巧不同于哈代–李特尔伍德方法。

关于更高次的型，达文波特提到皮特曼 (Pitman) [66] 就三次型给出了一个结果，但他评论说，对更高奇数次的型证明类似结果似乎涉及一种“原理上的困难”

(difficulty of principle)。施密特 (Schmidt) 在一系列论文 [73, 74, 75] 中提供了解决这一困难所需的关键结果。他的工作建立在达文波特–海尔布朗方法与一种对角化 (diagonalization) 程序的结合之上，由此得出一个证明：任何由足够多变量构成的奇数次一般丢番图不等式组都有解。更确切地说，他证明：给定奇正整数 $d_1, \dots, d_R$ ，存在一个仅依赖于 $d_1, \dots, d_R$ 的常数 $C(d_1, \dots, d_R)$ ，使得：给定任意次数分别为 $d_1, \dots, d_R$ 、变量数为 s 的实型 $F_1, \dots, F_R$ ，其中 $s \geq C(d_1, \dots, d_R)$ ，并给定 $\varepsilon > 0$ ，则存在非平凡整数向量 $\mathbf{x}$ 使得

$$|F_1(\mathbf{x})| < \varepsilon, \quad |F_2(\mathbf{x})| < \varepsilon, \quad \dots, \quad |F_R(\mathbf{x})| < \varepsilon.$$

有许多结果给出诸如 $C(d_1, \dots, d_R)$ 之类的下界，针对特定类型的型，我们仅提及其中两个。布吕德恩（Brüdern）与库克（Cook）[11] 在系数满足某些条件下，对对角型方程组给出了这样一个结果；纳德萨林甘（Nadesalingam）与皮特曼（Pitman）[62] 对 R 个对角三次型方程组给出了明确的下界。

人们也可以问及涉及一般正定型（其系数不全成有理数之比）的不等式。我们当然不期望这些型在整数点处的值在实轴上稠密；因此相关的问题——由埃斯特曼（Estermann）提出——是：当变量数足够大时，随着这些值趋于无穷，相邻的值之间的间隔是否趋于零。对于对角二次型，达文波特与刘易斯（Lewis）[28] 指出：当变量数 s 至少为 5 时，这可由雅尼克（Jarník）与瓦尔菲什（Walfisz）[51] 的一个结果轻松推出。在他们的论文中，达文波特与刘易斯朝着回答一般正定二次型 $Q(\mathbf{x})$ 的间隔问题迈出了一步，针对 s 个变量的情形。

他们的方法实质上表明（正如库克（Cook）与拉加万（Raghavan）[15] 所论证的）：对于此类型，若 s 足够大且给定 $\varepsilon > 0$ ，则对任意充分大的整数点 $\mathbf{x}_0$ ，存在许多整数点 $\mathbf{x}$ ，对它们有 $|Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ ，其中“许多”这一概念可以精确地定义。1999 年，本特库斯（Bentkus）与格策（Götze）[3] 用强有力的新技巧解决了间隔问题，格策（Götze）[36] 进而对结果作了改进。这些结果共同确立：对 $s \geq 5$ 以及任意 s 个变量、系数不全成有理数之比的正定二次型 Q ，随着 Q 在整数点处的值趋于无穷，其相继值之间的差趋于零。他们的方法催生了关于丢番图不等式的大量新工作。此外，我们注意到一些研究者考虑了更高次的非齐次多项式的特殊类型，包括布吕德恩（Brüdern）[10]、本特库斯与格策（Bentkus and Götze）[4] 以及弗里曼（Freeman）[34]。

自达文波特与海尔布朗的工作以来，关于保证 k 次对角丢番图不等式非平凡可解所需的 s 的下界，已有许多改进。对每个正整数 k ，设 $G_{\text{ineq}}(k)$ 表示满足如下性质的最小正整数 s_0 ：对所有 $s \geq s_0$ ，对所有系数不全成有理数之比的不定对角型 $\lambda_1 x_1^k + \dots + \lambda_s x_s^k$ ，以及对所有 $\varepsilon > 0$ ，都存在

$$|\lambda_1 x_1^k + \dots + \lambda_s x_s^k| < \varepsilon \tag{4}$$

的非平凡整数解。正如达文波特所评论的，达文波特与罗斯（Roth）[30] 给出了一个改进；他们证明存在常数 $C_1 > 0$ 使得

$$G_{\text{ineq}}(k) \leq C_1 k \log k.$$

事实上，达文波特–海尔布朗方法足够灵活，使得不等式的界大致与华林问题工作所给出的界相平行。特别地，对大 k ，人们有

$$G_{\text{ineq}}(k) \leq k(\log k + \log \log k + 2 + o(1)). \quad (5)$$

（关于该结果的陈述见 [101]。）我们注意到，在许多情形下——例如对 $k = 3$ 的贝克、布吕德恩与伍利（Baker, Brüdern and Wooley）[2]——要达到与 $G(k)$ 相同的界需要额外的努力。伍利（Wooley）[101] 晚近的工作表明： $G(k)$ 的界一般（除少数例外）也适用作 $G_{\text{ineq}}(k)$ 的界。

正如达文波特所指出的，第 20 章中的证明仅适用于一个由大的 P 构成的序列，该序列依赖于诸系数之比值的有理逼近性质。在哈代–李特尔伍德方法的许多应用中，人们对所有正 P 都能得到整数解个数的渐近公式，而所需努力并不比确立可解性多多少。例如，对系数非零且不全成有理数之比的不定对角型，对正 P ，以及相对于 k 而言 s 足够大时，我们会期望 (4) 中满足 $|x_i| \leq P$ ($1 \leq i \leq s$) 的整数解 $\mathbf{x}$ 的个数 $N(P)$ 满足

$$N(P) = C(s, k, \lambda_1, \dots, \lambda_s) \varepsilon P^{s-k} + o(P^{s-k}), \quad (6)$$

其中 $C(s, k, \lambda_1, \dots, \lambda_s)$ 是一个仅依赖于 s, k 及系数 λ_i 的正常数。然而，达文波特与海尔布朗的证明（连同一些小的技术性改动）实质上只能对一个由大的 P 构成的无穷序列给出对角丢番图不等式的渐近公式。在他们的论文中，本特库斯与格策（Bentkus and Götze）[3] 对系数不全成有理数之比的一般正定二次型，对所有正 P ，确立了 (6) 的相应类比；尽管他们的证明并未以达文波特–海尔布朗方法的语言来表述，其思想是类似的。通过改造他们的工作，弗里曼（Freeman）[33, 35] 得以对所有正 P 证明：对 k 次的不定对角型，存在诸如 (6) 那样的渐近公式。伍利（Wooley）[101] 借助减少保证渐近公式存在所需变量数的巧妙思想，对这一工作作了相当大的简化与改进。

特别地，关于大 k 时渐近公式的存在性，人们可以确立与 (5) 类似的结果；若我们仿照 $G_{\text{ineq}}(k)$ 定义 $G_{\text{asympt}}(k)$ ，则有

$$G_{\text{asympt}}(k) \leq k^2 (\log k + \log \log k + O(1)).$$

最后，我们指出：埃斯金、马古利斯与莫泽斯 (Eskin, Margulis and Mozes) [31] 运用不同于达文波特–海尔布朗方法的技巧，事实上更早地证明了：对至少四个变量、系数不全成有理数之比、且符号差 (signature) 不等于 $(2, 2)$ 的一般不定二次型，期望类型的渐近公式存在。

编者序 Editorial preface

撰文：T. D. Browning (牛津大学数学研究所, Mathematical Institute, Oxford University)

像许多数学家一样，我第一次接触数论是通过达文波特的著作《高等算术》(The Higher Arithmetic) [23]。很难不为他对该学科的驾驭以及奇妙的阐述风格所折服。而在更高深的层面上，达文波特《乘性数论》(Multiplicative Number Theory) [24] 的第三版近来也已问世。因此可以公允地说，达文波特至今对全世界的数学家仍有相当大的感召力。在得知达文波特还撰写过一套鲜为人知、处理一个具有重大现实意义之领域的讲义后，我立刻被驱使着去尝试将它重新付印。在此过程中，我尽力在原有格式中保留尽可能多的材料，仅仅订正了我所遇到的错误。

正如书名所示，本书关注的是运用解析方法研究某些多项式方程与不等式的整数解。它基于达文波特于 1960 年代初在密歇根大学 (University of Michigan) 所作的讲座。这一解析方法通常被称为“哈代–李特尔伍德圆法” (Hardy–Littlewood circle method)，其威力可由能用它处理的数论问题之多样范围而清楚地展现出来。本书前半部分用于讨论该方法在其最经典背景下的应用：华林问题以及对角型对整数的表示。在第 11–19 章中，达文波特在这些基础之上更进一步，展示了该方法有时如何能被调整以处理一般齐次多项式方程组的整数解。最后，在第 20 章中，达文波特阐述了他本人与海尔布朗 (Heilbronn) 在丢番图不等式背

景下所作的工作。与他的其他著作相比，这套讲义甚至更能反映出达文波特对该领域的广泛影响以及他对相关知识的深刻造诣。

达文波特讲义的本版已得到大幅充实，办法是增加了一篇前言，其主要目的在于将讲义所描述的知识状况置于现代视角之下。我极为感谢弗里曼教授、希思-布朗教授与沃恩教授（Professor Freeman, Professor Heath-Brown and Professor Vaughan）将他们的权威赋予这一项目。我还要感谢莉莲·皮尔斯与卢克·伍德沃德（Lillian Pierce and Luke Woodward），感谢他们在帮助我将达文波特的原始讲义转录为 LaTeX 时付出的全部辛勤工作。最后，我很荣幸向巴斯大学的詹姆斯·达文波特（James Davenport at Bath University）以及剑桥大学出版社的戴维·特拉纳（David Tranah at Cambridge University Press）表达谢意，感谢他们与我一同满怀热忱地把这套讲义带到更广泛的数学读者面前。

T. D. Browning

数学研究所（Mathematical Institute）

牛津大学（Oxford University）

24-29 St. Giles'

Oxford

OX1 3LB

browning@maths.ox.ac.uk