

第1章 引言

Introduction

哈代（Hardy）与利特尔伍德（Littlewood）的解析方法（有时称为“圆法”，circle method）是为处理数论中的加性问题（additive problems）而发展起来的。这类问题关心的是把一个大数表示为某些指定类型的数之和。被加数（summand）的个数既可以是固定的，也可以是不受限制的；在后一种情形下我们谈论分拆问题（partition problems）。最著名的加性问题是华林问题（Waring's problem），其中指定的数是 k 次幂，于是问题就是把一个大数 N 表示为

$$N = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k, \quad (1.1)$$

其中 s 与 k 是给定的，而 $x_1, \dots, x_s$ 是正整数。几乎同样著名的是哥德巴赫三素数问题（Goldbach's ternary problem），其中指定的数是素数，问题是把一个大数 N 表示为

$$N = p_1 + p_2 + p_3.$$

哈代与利特尔伍德的伟大成就，后来又被维诺格拉多夫（Vinogradov）所取得的卓越进展所继承；因此，我们的俄国同行如今称之为“哈代-利特尔伍德-维诺格拉多夫方法”（Hardy-Littlewood-Vinogradov method），这并非没有道理。

值得回顾的是，哈代-利特尔伍德方法的起源可以追溯到哈代与拉马努金（Ramanujan）于 1917 年发表的一篇论文 [69]，其内容是关于 $p(n)$ 的渐近行为，即 n 的分拆总数。函数 $p(n)$ 的增长大致像 $e^{A\sqrt{n}}$ ，其中 A 是某个正常数；哈代与拉马努金为它求得了一个渐近级数，如果在最小项处截断，便给出 $p(n)$ ，误

差为 $O(n^{-1/4})$ 。这种高度精确性的内在解释，被哈代描述为“不可思议的” (uncanny)，它由拉德马赫 (Rademacher) 于 1937 年给出 [68]：存在一个收敛级数，它精确地表示 $p(n)$ ，并且这个级数起初几乎与那个渐近级数完全相同。还有另外一组问题，哈代-利特尔伍德方法对它们能给出精确的公式；这些问题关心的是把一个数表示为给定个数的平方之和。对于更高次幂，似乎不大可能存在这样的公式。

华林问题关心的是特殊的丢番图方程 (1.1)。把哈代-利特尔伍德方法推广到处理更一般的加性型方程¹，原则上并无困难，例如

$$N = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_s),$$

其中 $f(x)$ 是取整数值的多项式；特别地，推广到方程

$$N = a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \cdots + a_s x_s^k. \quad (1.2)$$

然而，只是在最近这些年里，才在把该方法改造以适用于一般的（即非加性的）丢番图方程方面取得了长足的进展。关于这些发展的叙述将在后面的讲座中给出，但我们起初将主要关注华林问题以及形如 (1.2) 的加性方程。所有关于一般丢番图方程的工作都严重依赖于加性方程方面工作的方法或结果。

最后，我们将略微谈及丢番图不等式 (Diophantine inequalities) 这一课题。在这里，同样地，现在已经知道了一些一般性的结果，但它们不及方程情形的结果那样完整和精确。

1. 参见专著 [63]。↵