

Weyl 不等式与华罗庚不等式

Weyl's inequality and Hua's inequality

研究华林问题 (Waring's problem), 乃至研究数论解析理论中的许多其他问题时, 最重要的单一工具就是 Weyl 不等式。这一不等式由 Weyl 在其 1916 年关于数列模 1 均匀分布的伟大论文 [96] 中以一种不太显式的形式给出。针对多项式、并以其最高次系数表述的显式形式, 则由 Hardy 与 Littlewood 在 P.N. I [37] 中给出。

引理 3.1. (Weyl 不等式) 设 $f(x)$ 是一个次数为 k 、最高次系数为 α 的实系数多项式:

$$f(x) = \alpha x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \cdots + \alpha_k.$$

假设 α 有一个满足下述条件的有理逼近 a/q :

$$(a, q) = 1, \quad q > 0, \quad \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

那么, 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\left| \sum_{x=1}^P e(f(x)) \right| \ll P^{1+\varepsilon} \left(P^{-\frac{1}{k}} + q^{-\frac{1}{k}} + \left(\frac{P^k}{q} \right)^{-\frac{1}{k}} \right),$$

其中 $K = 2^{k-1}$, 所含的隐性常数¹只依赖于 k 与 ε 。

注. 当 $P^\delta \leq q \leq P^{k-\delta}$ (对某个固定的 $\delta > 0$) 时, 该不等式对平凡上界 P 给出了某种改进。若 $P \leq q \leq P^{k-1}$, 则我们得到估计 $P^{1-1/K+\varepsilon}$; 正是在这些条件下, Weyl 不等式得到最为常见的应用。注意, 若 q 很小, 则 Weyl 不等式不能给出任何有用的信息; 这是很自然的, 因为若 $f(x) = \alpha x^k$ 且 α 非常接近于一个分母很小的有理数, 则该和确实具有趋近于 P 的量级。

证. 证明中的基本操作是对一个指数和的绝对值取平方, 从而把该和与一些次数更低的多项式的同类和的平均值联系起来。令

$$S_k(f) = \sum_{x=P_1+1}^{P_2} e(f(x)),$$

其中 $0 \leq P_2 - P_1 \leq P$, 下标 k 用于标记 $f(x)$ 的次数。则

$$\begin{aligned} |S_k(f)|^2 &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} e(f(x_2) - f(x_1)) \\ &= P_2 - P_1 + 2\Re \sum_{\substack{x_1, x_2 \\ x_2 > x_1}} e(f(x_2) - f(x_1)). \end{aligned}$$

令 $x_2 = x_1 + y$ 。则 $1 \leq y < P_2 - P_1$, 且

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + y) - f(x_1) = \Delta_y f(x_1),$$

此处采用了显然的记号。于是

$$|S_k(f)|^2 = P_2 - P_1 + 2\Re \sum_{y=1}^P \sum_x e(\Delta_y f(x)),$$

其中对 x 的求和取遍一个依赖于 y 但包含于 $P_1 < x \leq P_2$ 之中的区间。对某些 y 的取值而言, 该区间可能为空。

特别地,

$$|S_k(f)|^2 \leq P + 2 \sum_{y=1}^P |S_{k-1}(\Delta_y f)|,$$

其中 S_{k-1} 所对应的区间正是刚才描述的那种。重复上述论证，我们得到

$$|S_{k-1}(\Delta_y f)|^2 \leq P + 2 \sum_{z=1}^P |S_{k-2}(\Delta_{y,z} f)|,$$

其中 S_{k-2} 的求和区间同时依赖于 y 与 z ，但仍包含于 $P_1 < x \leq P_2$ 。利用 Cauchy 不等式，便可把第二个不等式中的 S_{k-1} 代入第一个不等式：

$$\begin{aligned} |S_k(f)|^4 &\ll P^2 + P \sum_{y=1}^P |S_{k-1}(\Delta_y f)|^2 \\ &\ll P^3 + P \sum_{y=1}^P \sum_{z=1}^P |S_{k-2}(\Delta_{y,z} f)|. \end{aligned}$$

此过程可以继续，由此建立的一般不等式为

$$|S_k(f)|^{2^\nu} \ll P^{2^\nu-1} + P^{2^\nu-\nu-1} \sum_{y_1=1}^P \cdots \sum_{y_\nu=1}^P |S_{k-\nu}(\Delta_{y_1, \dots, y_\nu} f)|. \quad (3.1)$$

这只需对 ν 作归纳即可证明：再次利用 Cauchy 不等式，连同上面所述把 $|S_{k-\nu}|^2$ 用 $S_{k-\nu-1}$ 表出的基本操作即可。须知 (3.1) 中对 x 的求和范围是一个依赖于 $y_1, \dots, y_\nu$ 的区间，但包含于 $P_1 < x \leq P_2$ 。

在此我们插入一点说明，它在引理 3.2 的证明中会有用。这就是：若在导出 (3.1) 的最后一步中，我们把基本操作以其原始形式应用，则得到

$$|S_k(f)|^{2^\nu} \ll P^{2^\nu-1} + P^{2^\nu-\nu-1} \sum_{y_1=1}^P \cdots \sum_{y_\nu=1}^P \Re S_{k-\nu}(\Delta_{y_1, \dots, y_\nu} f). \quad (3.2)$$

此处同样， $S_{k-\nu}$ 中 x 的取值范围依赖于 $y_1, \dots, y_\nu$ ，并且有时可能为空。

回到 (3.1), 我们取 $\nu = k - 1$, 并在原始的 S_k 中取 $P_1 = 0, P_2 = P$ 。我们注意到

$$\Delta_{y_1, \dots, y_{k-1}} f(x) = k! \alpha y_1 \cdots y_{k-1} x + \beta,$$

不妨这样记, 其中 β 是一些与 x 无关的项的集合。于是

$$|S_1(\Delta_{y_1, \dots, y_{k-1}} f)| = \left| \sum_x e(k! \alpha y_1 \cdots y_{k-1} x) \right|.$$

右边的和取遍任一长度至多为 P 的 x 区间, 形如

$$\left| \sum_{x=x_1}^{x_2-1} e(\lambda x) \right| \leq \frac{2}{|1 - e(\lambda)|} = \frac{1}{|\sin \pi \lambda|} \ll \frac{1}{\|\lambda\|},$$

其中 $\|\lambda\|$ 表示 λ 到最近整数的距离。当 λ 是整数时这一估计失效——事实上当 λ 非常接近整数时它给出的结果很差——但我们可以用显然的上界 P 来补充。

于是 (3.1) 给出

$$|S_k(f)|^K \ll P^{K-1} + P^{K-k} \sum_{y_1=1}^P \cdots \sum_{y_{k-1}=1}^P \min(P, \|k! \alpha y_1 \cdots y_{k-1}\|^{-1}).$$

现在我们诉诸初等数论中的一个结果, 它使我们能把和中所有使 $k! y_1 \cdots y_{k-1}$ 取某个给定值 (记为 m) 的项合并到一起。这样的项的个数是 $\ll m^\varepsilon$ 。为证明此点, 只需证明

$$d(m) \ll m^\varepsilon, \tag{3.3}$$

对任意整数 m 成立, 其中 $d(m) = \sum_{d|m} 1$ 是通常的除数函数。事实上, 对于每个 $y_1, \dots, y_{k-1}$, 至多有 $d(m)$ 种可能。为建立 (3.3), 设 $m = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \cdots$, 并注意到

$$\frac{d(m)}{m^\varepsilon} = \prod_i \frac{\lambda_i + 1}{p_i^{\varepsilon \lambda_i}} \leq \prod_{p_i \leq 2^{1/\varepsilon}} \frac{\lambda_i + 1}{2^{\varepsilon \lambda_i}} \leq C(\varepsilon),$$

因为 $2^{-\varepsilon\lambda}(\lambda + 1)$ 对 $\lambda > 0$ 是有上界的。

如上所述把各项合并，我们得到

$$|S_k(f)|^K \ll P^{K-1} + P^{K-k+\varepsilon} \sum_{m=1}^{k!P^{k-1}} \min(P, \|\alpha m\|^{-1}).$$

剩下的是用题设中提到的对 α 的有理逼近 a/q 来估计最后这个和。我们把对 m 的求和分成若干个由 q 个连续项构成的块（也许还有一个不完整的块），这样的块的个数是

$$\ll \frac{P^{k-1}}{q} + 1.$$

考虑任一个块上的和，它形如

$$\sum_{m=0}^{q-1} \min(P, \|\alpha(m_1 + m)\|^{-1}),$$

其中 m_1 是该块中的第一个数。我们有

$$\alpha(m_1 + m) = \alpha m_1 + \frac{am}{q} + O\left(\frac{1}{q}\right),$$

这是因为 $|\alpha - a/q| \leq q^{-2}$ 且 $0 \leq m < q$ 。当 m 从 0 取到 $q-1$ 时， am 遍历模 q 的完全剩余系。令 $am \equiv r \pmod{q}$ ，则该和为

$$\sum_{r=0}^{q-1} \min\left(P, \frac{1}{\|(r+b)/q + O(1/q)\|}\right),$$

其中我们取 b 为最接近 $q\alpha m_1$ 的整数。在和中有 $O(1)$ 个 r 值使得最小值中的第二个表达式无用，即那些使得 $r+b \pmod{q}$ 的绝对最小剩余很小的 r 。对这些 r ，我们必须取 P 。对于其余的 r 值，若 s 表示 $r+b \pmod{q}$ 的绝对最小剩余，则有

$$\left\| \frac{r+b}{q} + O\left(\frac{1}{q}\right) \right\| \gg \frac{s}{q}.$$

因此上述和为

$$\ll P + \sum_{s=1}^{q/2} \frac{q}{s} \ll P + q \log q.$$

计入块的数目，我们得到

$$|S_k(f)|^K \ll P^{K-1} + P^{K-k+\varepsilon} \left(\frac{P^{k-1}}{q} + 1 \right) (P + q \log q).$$

由于可以假设 $q \leq P^k$ （否则引理的结论平凡成立），因子 $\log q$ 可被吸收进 P^ε 中。于是右边为

$$\ll P^{K+\varepsilon} (P^{-1} + q^{-1} + P^{-k}q),$$

这就给出了所要的结果。 ■

注. 若 k 较大，则 Vinogradov 给出了一个好得多的估计，其中（粗略地说） 2^{k-1} 被 $4k^2 \log k$ 所取代 [49, 第 6 章]。

推论（引理 3.1 之推论）. 令

$$S_{a,q} = \sum_{z=1}^q e(az^k/q),$$

其中 a, q 是互素的整数且 $q > 0$ 。则

$$S_{a,q} \ll q^{1-1/K+\varepsilon}.$$

这是引理 3.1 的一个特例，对应于 $\alpha = a/q$ 且 $P = q$ 。我们以后（引理 6.4）将证明更精确的估计 $q^{1-1/k}$ 以取代 $q^{1-1/K+\varepsilon}$ ，但目前上述结果已足够使用。

引理 3.2. (华罗庚不等式 [48]) 若

$$T(\alpha) = \sum_{x=1}^P e(\alpha x^k),$$

则

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^{2^k} d\alpha \ll P^{2^k-k+\varepsilon},$$

对任意固定的 $\varepsilon > 0$ 成立。

证. 记

$$I_\nu = \int_0^1 |T(\alpha)|^{2^\nu} d\alpha.$$

我们对 ν 作归纳，证明

$$I_\nu \ll P^{2^\nu-\nu+\varepsilon}, \quad \nu = 1, \dots, k, \quad (3.4)$$

其中 $\nu = k$ 的情形即为引理所断言的结果。

对 $\nu = 1$ ，该估计是显然的。我们有

$$I_1 = \int_0^1 \sum_{x_1} e(\alpha x_1^k) \sum_{x_2} e(-\alpha x_2^k) d\alpha = P,$$

因为当 $x_1 = x_2$ 时对 α 的积分为 1，否则为 0。

现在假设 (3.4) 对某个特定的整数 $\nu \leq k-1$ 成立；我们要推出把 ν 换成 $\nu+1$ 时相应的结果。我们回顾前一证明中的不等式 (3.2)；将其中的 $S_k(f)$ 换成

$T(\alpha)$, 它表明

$$|T(\alpha)|^{2^\nu} \ll P^{2^\nu-1} + P^{2^\nu-\nu-1} \Re \sum_{y_1=1}^P \cdots \sum_{y_\nu=1}^P S_{k-\nu},$$

其中

$$S_{k-\nu} = \sum_x e(\alpha \Delta_{y_1, \dots, y_\nu}(x^k)).$$

注意, 对 x 的求和范围依赖于 $y_1, \dots, y_\nu, P$ 的取值, 但包含于 $[1, P]$ 。

把不等式两边都乘以 $|T(\alpha)|^{2^\nu}$, 并从 0 积到 1, 我们得到

$$I_{\nu+1} \ll P^{2^\nu-1} I_\nu + P^{2^\nu-\nu-1} \sum_{y_1, \dots, y_\nu} \Re \int_0^1 S_{k-\nu} |T|^{2^\nu} d\alpha.$$

最后这个积分为

$$\int_0^1 \sum_x e(\alpha \Delta_{y_1, \dots, y_\nu}(x^k)) \sum_{\substack{u_1, \dots, u_{2^\nu-1} \\ v_1, \dots, v_{2^\nu-1}}} e(\alpha u_1^k + \cdots) e(-\alpha v_1^k - \cdots) d\alpha,$$

其中 u_i 与 v_i 从 1 取到 P 。该积分等于

$$\Delta_{y_1, \dots, y_\nu}(x^k) + u_1^k + \cdots - v_1^k - \cdots = 0 \quad (3.5)$$

的解的个数。对 $y_1, \dots, y_\nu$ 求和, 便给出在所有变量上的解的总数。因此

$$I_{\nu+1} \ll P^{2^\nu-1} I_\nu + P^{2^\nu-\nu-1} N, \quad (3.6)$$

其中 N 表示 (3.5) 在所有变量上的解的个数, 这些变量现在都是 $[1, P]$ 中的整数。

现在重要的是要注意到: 由于 $y_1, \dots, y_\nu$ 与 x 都是正的, 我们有

$$\Delta_{y_1, \dots, y_\nu}(x^k) > 0.$$

此外，这个数能被 $y_1, \dots, y_\nu$ 中的每一个整除。因此，若我们给定 $u_1, \dots, u_{2^{\nu-1}}$ 与 $v_1, \dots, v_{2^{\nu-1}}$ 任意值，则由 (3.3)， $y_1, \dots, y_\nu$ 中每一个的可能取法数为 $\ll P^\varepsilon$ 。于是 x 至多有一种可能取法，因为 $\Delta_{y_1, \dots, y_\nu}(x^k)$ 是 x 的严格递增函数（注意 $\nu \leq k-1$ ）。 u_i 与 v_i 的可能取法数为 $\ll P^{2^\nu}$ ，由此可知

$$N \ll P^{2^\nu + \nu\varepsilon}.$$

代入 (3.6) 并利用归纳假设，我们得到

$$I_{\nu+1} \ll P^{2^\nu-1} P^{2^\nu-\nu+\varepsilon} + P^{2^\nu-\nu-1} P^{2^\nu+\nu\varepsilon} \ll P^{2^{\nu+1}-(\nu+1)+\nu\varepsilon}.$$

这正是把 ν 换成 $\nu+1$ 后的 (3.4)，只是 ε 有所改变，而这无关紧要。 ■

注. 考察当 $k=3$ 时引理 3.2 所给出的信息是颇有意思的。令 $\lambda(m)$ 记使得

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^{2m} d\alpha \ll P^\lambda$$

成立的指数 λ 的下确界。由 Cauchy 不等式可知

$$\lambda\left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\lambda(m_1) + \lambda(m_2)),$$

因此 $\lambda(m)$ 作为 m 的函数是凸的。引理 3.2 告诉我们

$$\lambda(1) \leq 1, \quad \lambda(2) \leq 2, \quad \lambda(4) \leq 5,$$

并且可以证明这三处实际上都取等号。于是该图像落在连接

$(1, 1), (2, 2), (4, 5)$ 的两条线段之上或之下。看来当 $2 < m < 4$ 时该图像很可能严格地位于线段之下，但这一点从未被证明。如果能证明它，便能够建立八个立方数（而非九个立方数， $9 = 2^k + 1$ ）的渐近公式。例如，只要能证明

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^6 d\alpha \ll P^{7/2-\delta}$$

对某个正数 δ 成立就够了。这等价于断言：

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3$$

(所有变量介于 0 与 P 之间) 的解的总数为 $\ll P^{7/2-\delta}$ 。

-
1. 我们使用 Vinogradov 记号 $\ll$ 来表示一个带有未指定“常数”因子的不等式。在当前情形中，所出现的因子实际上与 k 无关，但我们无需了解这一点。↵