

Waring 问题：渐近公式

Waring's problem: the asymptotic formula

我们回到处理 Waring 问题的起点，也就是第 2 章的 (2.7)：

$$r(N) = \int_0^1 (T(\alpha))^s e(-N\alpha) d\alpha, \quad (4.1)$$

其中 $T(\alpha)$ 是 (2.5) 中那个从 1 到 P 求和的指数和，且 $P \geq [N^{1/k}]$ 。没有必要把 P 取得比所需更大，所以我们取 $P = [N^{1/k}]$ 。渐近公式中的主项将被证明具有 $N^{s/k-1}$ ，亦即 P^{s-k} 的量级；事实上，只要任何简单的渐近公式成立，它就必须如此，因为这是 P 的唯一一个与下述事实相容的幂次： $x_1, \dots, x_s$ 各有 P^s 种取法，而和 $x_1^k + \dots + x_s^k$ 表示的是至多 P^k 量级的数。

于是，凡是对积分 (4.1) 的贡献能被证明严格低于 P^{s-k} 量级的那些 α 取值集合，我们都可以略去。我们假设 $s \geq 2^k + 1$ ，若把被积表达式的绝对值看作

$$|T(\alpha)|^{s-2^k} |T(\alpha)|^{2^k},$$

那么由引理 3.2 可知：凡是满足 $|T(\alpha)| \ll P^{1-\delta}$ （其中 $\delta > 0$ 为某固定数）的任何 α 集合都可以略去。为得到这样一个 α 集合，我们将使用引理 3.1。

处理 Waring 问题及类似问题的工作中，一般性方案是把 α 的取值分为两个集合：主弧 (major arcs)，它对渐近公式中的主项有贡献；以及次弧 (minor arcs)，它的贡献按上面所述方式估计，归入误差项。两个集合之间精确的分界线，在很大程度上取决于手头有哪些可用的辅助结果，并且在某种程度上可能因人的偏好而异。一般而言，处理主弧有一些强有力的（虽然略嫌繁复的）方法可用，而问题的关键在于次弧。在任何具体问题中，一旦找到了一种能成功处理次弧的方法，人们通常

会发现：在该方法所允许的范围内尽可能扩大次弧是方便的，这样可以减少处理主弧所需的工作量（尽管这部分工作可能相对直接）。在本章的处理中，与本课题其他场合常见的情形相比，我们可以把主弧取得数目较少且长度较短。

围绕每个有理数 a/q （既约形式），我们放置一个区间

$$\mathfrak{M}_{a,q} : |\alpha - a/q| < P^{-k+\delta}, \quad (4.2)$$

并且对下述 q, a 都这样做：

$$1 \leq q \leq P^\delta, \quad 1 \leq a \leq q, \quad (a, q) = 1. \quad (4.3)$$

这些区间不重叠，因为它们的中心之间的距离至少为 $P^{-2\delta}$ ，而这远大于区间的长度。此外，除右端的 $1/1$ 处那个区间的右半部分外，这些区间都包含在 $0 \leq \alpha \leq 1$ 内；为方便起见，我们设想把那个区间向左平移一个量 1，使它落到 $\alpha = 0$ 的右侧。区间 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 就是主弧，它们关于 $[0, 1]$ 的补集构成次弧，其全体记作 $\mathfrak{m}$ 。在这些定义中， δ 是某个固定的小正数。可以指出：在 Hardy-Littlewood 方法的许多应用中，(4.2) 中 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 的长度会带有一个因子 q^{-1} 以及 P 的某个负幂；但此处不需要这个因子，省略它是一个轻微的简化。

引理 4.1. 若 $s \geq 2^k + 1$ ，则有

$$\int_{\mathfrak{m}} |T(\alpha)|^s d\alpha \ll P^{s-k-\delta'},$$

其中 δ' 是依赖于 δ 的一个正数。

证. 由 Dirichlet 关于丢番图逼近的经典结果，每个 α 都有一个有理逼近 a/q 满足

$$1 \leq q \leq P^{k-\delta}, \quad |\alpha - a/q| < q^{-1} P^{-k+\delta}. \quad (4.4)$$

此外，当 $0 < \alpha < 1$ 时我们总有 $1 \leq a \leq q$ 。由于 (4.4) 中最后一个不等式比 (4.2) 中的更强，若 $q \leq P^\delta$ ，则 α 应当落在某个 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 中。因此，若 α 落在 $\mathfrak{m}$ 中，我们必有

$$q > P^\delta.$$

由于 $|\alpha - a/q| < q^{-2}$, 我们可以把引理 3.1 应用于指数和 $T(\alpha)$; 又因为 $P^k/q \geq P^\delta$, 我们得到

$$|T(\alpha)| \ll P^{1+\varepsilon-\delta/K},$$

其中 $K = 2^{k-1}$ 。按前面指出的方式把它与引理 3.2 结合起来, 我们推出

$$\int_{\mathfrak{M}} |T(\alpha)|^s d\alpha \ll P^{(s-2^k)(1+\varepsilon-\delta/K)} \int_0^1 |T(\alpha)|^{2^k} d\alpha \ll P^{s-k-\delta'}$$

其中 $\delta' > 0$ 依赖于 δ 。这就证明了引理 4.1。 ■

可以指出: 除了诉诸 Dirichlet 定理之外, 我们也可以利用连分数的一个简单性质: 若取 a/q 为满足 $q \leq P^{k-\delta}$ 的 α 的最后一个渐近分数, 我们同样会得到 (4.4)。

现在我们把注意力转向主弧 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 。这里 α 非常接近 a/q , 且 q 相对较小。如果 (4.2) 中 P 的指数取的是 $-k - \delta$ 而非 $-k + \delta$, 则 $T(\alpha)$ 在 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 上将几乎是常数, 因为那时我们应有

$$\left| \alpha x^k - \frac{a}{q} x^k \right| < P^{-k-\delta} P^k = P^{-\delta}.$$

当然, 情形并非如此, 但尽管如此, 弧 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 是如此之短, 以至于 $T(\alpha)$ 在该区间上的变化相对平缓。它究竟如何变化, 可由下面的引理看出。

引理 4.2. 对于 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 中的 α , 令 $\alpha = \beta + a/q$, 我们有

$$T(\alpha) = q^{-1} S_{a,q} I(\beta) + O(P^{2\delta}), \quad (4.5)$$

其中

$$S_{a,q} = \sum_{z=1}^q e(az^k/q), \quad (4.6)$$

$$I(\beta) = \int_0^P e(\beta \xi^k) d\xi. \quad (4.7)$$

证. 我们把定义 $T(\alpha)$ 的和中那些位于同一剩余类 (模 q) 的 x 值收集到一起, 这是自然的做法, 因为 αx^k 关于 x 几乎是以 q 为周期的。最方便的实现方式是令 $x = qy + z$, 其中 $1 \leq z \leq q$; 此处 y 取遍一个区间——该区间依赖于 z , 对应于 $0 < x \leq P$ 。我们得到

$$T(\alpha) = \sum_{z=1}^q e(\alpha z^k/q) \sum_y e(\beta(qy + z)^k).$$

现在我们设法把离散变量 y 换成连续变量 η , 并把对 y 的求和换成对 η 的积分。如果这能做到, 那么我们可以再从 η 作变量替换到 ξ , 其中 $\xi = q\eta + z$; ξ 的区间将是原来的区间 $0 \leq \xi \leq P$, 于是我们就把对 y 的求和换成了

$$q^{-1} \int_0^P e(\beta \xi^k) d\xi = q^{-1} I(\beta),$$

其中因子 q^{-1} 来自 $d\eta/d\xi$ 。这样我们就恰好得到 (4.5) 中的主项。

我们需要估计对 y 求和与对应的积分之差。就目前的目的而言, 一个很粗糙的论证就足够好了。若 $f(y)$ 是任何可微函数, 则有

$$|f(\eta) - f(y)| \leq \frac{1}{2} \max |f'(\eta)| \quad \text{当 } |\eta - y| \leq \frac{1}{2}.$$

因此, 把任何区间 $A < \eta < B$ 划分为长度为 1 的若干小区间外加两段可能的残余区间, 我们得到

$$\left| \int_A^B f(\eta) d\eta - \sum_{A < y < B} f(y) \right| \ll (B - A) \max |f'(\eta)| + \max |f(\eta)|.$$

在我们的情形, $f(\eta) = e(\beta(q\eta + z)^k)$, 因而

$$\max |f'(\eta)| \ll q|\beta|P^{k-1}, \quad \max |f(\eta)| = 1.$$

又 $B - A \ll P/q$ 。因此，把对 y 的求和换成对 η 的积分所产生的误差是

$$\ll Pq^{-1}q|\beta|P^{k-1} + 1 \ll P^\delta,$$

因为由 (4.2) 有 $|\beta| < P^{-k+\delta}$ 。乘以 q (它 $\leq P^\delta$) 以便处理外层对 z 的求和，我们便得到 (4.5) 中的误差项。 ■

稍后在引理 9.1 中，我们将遇到一种更有效的、用对应积分替换求和的方法。

引理 4.3. 若 $\mathfrak{M}$ 表示主弧 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 的全体，则

$$\int_{\mathfrak{M}} (T(\alpha))^s e(-N\alpha) d\alpha = P^{s-k} \mathfrak{S}(P^\delta, N) J(P^\delta) + O(P^{s-k-\delta'}) \quad (4.8)$$

对某个 $\delta' > 0$ 成立，其中

$$\mathfrak{S}(P^\delta, N) = \sum_{q \leq P^\delta} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q (q^{-1} S_{a,q})^s e(-Na/q), \quad (4.9)$$

$$J(P^\delta) = \int_{|\gamma| < P^\delta} \left(\int_0^1 e(\gamma \xi^k) d\xi \right)^s e(-\gamma) d\gamma. \quad (4.10)$$

证. 我们首先把在单个主弧 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 上成立的 $T(\alpha)$ 的表达式 (4.5) 提升到 s 次幂。由于

$$|q^{-1} S_{a,q} I(\beta)| \leq P$$

平凡地成立，我们得到

$$(T(\alpha))^s = (q^{-1} S_{a,q})^s (I(\beta))^s + O(P^{s-1+2\delta}). \quad (4.11)$$

把它乘以 $e(-N\alpha)$ 并在 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 上积分，也就是对 $|\beta| < P^{-k+\delta}$ 积分，最后这个表达式的主项给出

$$(q^{-1}S_{a,q})^s e(-Na/q) \int_{|\beta| < P^{-k+\delta}} (I(\beta))^s e(-N\beta) d\beta.$$

这里的积分与 q, a 无关, 因此对满足 (4.3) 的 q 与 a 求和, 给出

$$\mathfrak{S}(P^\delta, N) \int_{|\beta| < P^{-k+\delta}} (I(\beta))^s e(-N\beta) d\beta.$$

在被积函数中我们可以把 N 换成 P^k , 误差可忽略。事实上 $N - P^k \ll P^{k-1}$, 于是

$$|e(-\beta N) - e(-\beta P^k)| \ll |\beta| P^{k-1} \ll P^{-1+\delta},$$

从而积分中的误差为 $\ll P^{-k+\delta} P^s P^{-1+\delta}$ 。由于 $|\mathfrak{S}(P^\delta, N)|$ 的一个粗略估计是 $P^{2\delta}$, 这导致一个最终误差 $P^{s-k-1+4\delta}$, 它是可忽略的。现在积分为

$$\int_{|\beta| < P^{-k+\delta}} \left(\int_0^P e(\beta \xi^k) d\xi \right)^s e(-P^k \beta) d\beta,$$

令 $\xi = P\xi'$ 且 $\beta = P^{-k}\gamma$, 它变为

$$P^{s-k} J(P^\delta).$$

这样我们就得到了结果 (4.8) 中的主项。

还需估计 (4.11) 中误差项的影响。在 $|\beta| < P^{-k+\delta}$ 上积分后, 它变为 $\ll P^{s-k-1+3\delta}$ 。对 $a \leq q$ 与 $q \leq P^\delta$ 求和后, 它变为 $P^{s-k-1+5\delta}$, 由于 δ 很小, 这就是 (4.8) 中所给的形式。 ■

定义. 令

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q (q^{-1}S_{a,q})^s e(-Na/q). \quad (4.12)$$

这称为将 N 表示为 s 个正整数 k 次幂之和这一问题的奇异性级数 (singular series)。若 $s \geq 2^k + 1$, 则该级数绝对收敛, 且关于 N 一致收敛; 因为由引理 3.1 的推论我们有 (其中 $K = 2^{k-1}$):

$$|(q^{-1}S_{a,q})^s e(-Na/q)| \ll q^{-s/K+\varepsilon} \ll q^{-2-1/K+\varepsilon}.$$

稍后我们将证明: 在更宽松的条件 $s \geq 2k + 1$ 下, 同样的结论也成立。

定理 4.1. 若 $s \geq 2^k + 1$, 则将 N 表示为 s 个正整数 k 次幂之和的表示数 $r(N)$ 满足

$$r(N) = C_{k,s} N^{s/k-1} \mathfrak{S}(N) + O(N^{s/k-1-\delta'}) \quad (4.13)$$

对某个固定的 $\delta' > 0$ 成立, 其中

$$C_{k,s} = \frac{\Gamma(1 + 1/k)^s}{\Gamma(s/k)} > 0. \quad (4.14)$$

证. 由 (4.1) 以及引理 4.1 和 4.3,

$$\begin{aligned} r(N) &= \left\{ \int_{\mathfrak{M}} + \int_{\mathfrak{m}} \right\} (T(\alpha))^s e(-N\alpha) d\alpha \\ &= P^{s-k} \mathfrak{S}(P^\delta, N) J(P^\delta) + O(P^{s-k-\delta'}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

我们首先研究在 (4.10) 中定义的积分 $J(P^\delta)$ 。其中的内层积分, 通过显然的变量替换, 可以用三种方式表示:

$$\int_0^1 e(\gamma \xi^k) d\xi = k^{-1} \int_0^1 \zeta^{-1+1/k} e(\gamma \zeta) d\zeta = k^{-1} \gamma^{-1/k} \int_0^\gamma \zeta^{-1+1/k} e(\zeta) d\zeta,$$

其中在最后一个表达式中, 为简单起见我们假定 γ 为正。由 Dirichlet 关于无穷积分收敛的判别法, 再结合该积分在 0 处绝对收敛这一事实, 最后一个表达式中的积分是 γ 的有界函数。因此

$$\left| \int_0^1 e(\gamma \xi^k) d\xi \right| \ll |\gamma|^{-1/k}.$$

这使我们能够把 (4.10) 中对 γ 的积分扩展到无穷；我们得到

$$J(P^\delta) = J + O(P^{-(s/k-1)\delta}),$$

其中

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \left(k^{-1} \int_0^1 \zeta^{-1+1/k} e(\gamma \zeta) d\zeta \right)^s e(-\gamma) d\gamma. \quad (4.16)$$

显然 J 只依赖于 k 和 s ，我们稍后将证明 $J = C_{k,s}$ 。我们将把 J 称为将 N 表示为 s 个正整数 k 次幂之和这一问题的奇异积分 (singular integral)。

由级数 $\mathfrak{S}(N)$ 的绝对收敛性，以及刚刚为 $J(P^\delta)$ 所证的结果，我们可以在 (4.15) 中把 $\mathfrak{S}(P^\delta, N)$ 换成 $\mathfrak{S}(N)$ ，并把 $J(P^\delta)$ 换成 J ，所产生的误差都是允许的。我们还可以把 P 换成 $N^{1/k}$ ，误差也允许，这便给出 (4.13)，只是其中 $C_{k,s} = J$ 的证明尚未完成。 J 的确切值或许并不重要，但我们需要知道 $J > 0$ 。

为求出 J ，我们从下述事实出发：

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e(\mu \gamma) d\gamma = \frac{\sin 2\pi \lambda \mu}{\pi \mu}.$$

因此

$$\begin{aligned} k^s J &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 (\zeta_1 \cdots \zeta_s)^{-1+1/k} \frac{\sin 2\pi \lambda (\zeta_1 + \cdots + \zeta_s - 1)}{\pi (\zeta_1 + \cdots + \zeta_s - 1)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_s \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^s \phi(u) \frac{\sin 2\pi \lambda (u - 1)}{\pi (u - 1)} du, \end{aligned}$$

其中

$$\phi(u) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \{\zeta_1 \cdots \zeta_{s-1} (u - \zeta_1 - \cdots - \zeta_{s-1})\}^{-1+1/k} d\zeta_1 \cdots d\zeta_{s-1},$$

积分取遍满足 $u - 1 < \zeta_1 + \cdots + \zeta_{s-1} < u$ 的那些 $\zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}$ 。这里我们已经把变量从 ζ_s 换成了 u ，其中 $\zeta_1 + \cdots + \zeta_s = u$ 。

现在我们回忆有限区间上的 Fourier 积分定理，它指出¹：在某些条件下，

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_A^B \phi(u) \frac{\sin 2\pi\lambda(u - C)}{\pi(u - C)} du = \phi(C),$$

只要 $A < C < B$ 。假定这是可应用的，我们推出

$$\begin{aligned} k^s J &= \phi(1) \\ &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \{\zeta_1 \cdots \zeta_{s-1} (1 - \zeta_1 - \cdots - \zeta_{s-1})\}^{-1+1/k} d\zeta_1 \cdots d\zeta_{s-1}, \end{aligned}$$

其中积分取遍满足 $0 < \zeta_1 + \cdots + \zeta_{s-1} < 1$ 的那些 $\zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}$ 。最后这个定积分是一个 $s - 1$ 个变量的积分，它是 Dirichlet 所求出的一类积分的一个实例；它确实是 Euler 积分

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

的一个直接推广。我们有²

$$\phi(1) = \frac{\Gamma(1/k)^s}{\Gamma(s/k)},$$

因而

$$J = \left(\frac{1}{k}\right)^s \frac{\Gamma(1/k)^s}{\Gamma(s/k)} = \frac{\Gamma(1 + 1/k)^s}{\Gamma(s/k)}.$$

Fourier 积分定理成立的一个充分条件是 $\phi(u)$ 应当是有界变差的。为验证这一点，令 $\zeta_j = ut_j$ 。那么 $\phi(u)$ 等于

$$u^{s/k-1} \int_0^{1/u} \cdots \int_0^{1/u} \{t_1 \cdots t_{s-1} (1 - t_1 - \cdots - t_{s-1})\}^{-1+1/k} dt_1 \cdots dt_{s-1},$$

其中积分取遍满足 $1 - 1/u < t_1 + \cdots + t_{s-1} < 1$ 的那些 $t_1, \dots, t_{s-1}$ 。当 u 增大时积分区域收缩，而被积函数不含 u 。因此 $\phi(u)$ 是 $u^{-1+s/k}$ 与 u 的一个正的单调递减函数之积，从而是一个有界变差函数。这就完成了证明。 ■

注记. 在我们对奇异积分的处理中，我们遵循了 Landau 的一篇论文 [54]。关于略为更一般的处理，参见 Kestelman 的一篇论文 [52]。有若干手段可以避免使用 Fourier 积分定理；例如，可以把 $I(\beta)$ 换成有限和

$$k^{-1} \sum_{0 < m < P^k} m^{-1+1/k} e(\beta m),$$

或者也可以像 Vinogradov [93, 第 3 章] 那样间接地求出 J 。但总的来说，引用 Fourier 积分定理似乎是自然而恰当的。

在渐近公式 (4.13) 中，可以把第一个因子 $C_{k,s} N^{s/k-1}$ 看作度量了方程

$$x_1^k + \cdots + x_s^k = N, \quad x_1 > 0, \dots, x_s > 0$$

在实数中解的"密度"；它是某超曲面这一部分的 $(s-1)$ 维测度。换一种说法，它（在可忽略的误差范围内）是区域

$$N - \frac{1}{2} < x_1^k + \cdots + x_s^k < N + \frac{1}{2}, \quad x_1 > 0, \dots, x_s > 0$$

的 s 维体积。第二个因子 $\mathfrak{S}(N)$ 可以看作一个补偿因子，用以反映这样一个事实：整数的 k 次幂并不像实数的 k 次幂那样均匀分布，因为前者受到同余限制的约束。（ $\mathfrak{S}(N)$ 与同余之间的关系将在下一节中浮现。）于是，我们从渐近公式中得出的结论，用略嫌含糊的话来说就是：把一个大数表示为 s 个正整数 k 次幂之和的表示数，渐近地由这两种影响所主导，前提是 s 大于 k 的某个函数。

1. 例如可参见 [97, § 9.43]。↵

2. 例如可参见 [97, § 12.5]。↵