

奇异级数（续）

The singular series continued

我们现在来证明在第3.1引理的推论中提到的那个结果，即

$$|S_{a,q}| \ll q^{1-1/k}. \quad (6.1)$$

这蕴含了

$$|A(q)| \ll q^{1-s/k},$$

由此可知，若 $s \geq 2k + 1$ ，则奇异级数绝对收敛。第5章的 (5.8) 以及引理5.2的推论，在同一条件下也都成立。

引理 6.1. 若 $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ 且 $\delta = (k, p-1)$ ，则

$$|S_{a,p}| \leq (\delta - 1)p^{1/2}. \quad (6.2)$$

证. 由于 $x^k \equiv m \pmod{p}$ 与 $x^\delta \equiv m \pmod{p}$ 具有相同个数的解，我们有

$$S_{a,p} = \sum_x e\left(\frac{a}{p}x^\delta\right).$$

设 χ 是一个阶为 δ 的原特征（模 p ）。那么 $x^\delta \equiv t \pmod{p}$ 的解的个数为

$$1 + \chi(t) + \cdots + \chi^{\delta-1}(t).$$

因此

$$S_{a,p} = \sum_t \left\{ 1 + \chi(t) + \cdots + \chi^{\delta-1}(t) \right\} e\left(\frac{a}{p}t\right), \quad (6.3)$$

其中此处（以及本证明中其他地方）求和都是对模 p 的一个完全剩余系进行的。来自方括号中项 1 的那个和为 0，因为 $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ 。

若 ψ 是任何一个非主特征（模 p ），则称和

$$T(\psi) = \sum_t \psi(t) e\left(\frac{at}{p}\right)$$

为高斯和（Gauss sum），以纪念这类和在高斯的分圆论工作中所起的重要作用。我们可以很容易地证明 $|T(\psi)| = p^{1/2}$ ，如下所示。我们有

$$|T(\psi)|^2 = \sum_t \sum_u \psi(t) \bar{\psi}(u) e\left(\frac{a}{p}(t-u)\right).$$

这里我们可以略去 $u = 0$ ，因为 $\psi(0) = 0$ 。把变量从 t 换成 v ，其中 $t \equiv vu \pmod{p}$ ，我们得到

$$|T(\psi)|^2 = \sum_v \sum_{u \neq 0} \psi(v) e\left(\frac{au}{p}(v-1)\right).$$

内层和当 $v = 1$ 时为 $p - 1$ ，否则为 $-\psi(v)$ 。因此

$$|T(\psi)|^2 = p\psi(1) - \sum_v \psi(v) = p.$$

这就是前面所述的结果。在 (6.3) 中对 $\psi = \chi, \dots, \chi^{\delta-1}$ 应用此结果，我们便得到 (6.2)。 ■

注. (6.2) 在 $p = 2$ （于是 $\delta = 1$ ）时仍然成立，但此时它是平凡的，因为 $a = 1$ 且 $S_{1,2} = 1 + e^{i\pi} = 0$ 。

引理 6.2. 设 $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ 且 $p \nmid k$ 。那么, 对于 $1 < \nu \leq k$,

$$S_{a,p^\nu} = p^{\nu-1}, \quad (6.4)$$

而对于 $\nu > k$,

$$S_{a,p^\nu} = p^{k-1} S_{a,p^{\nu-k}}. \quad (6.5)$$

证. 在定义

$$S_{a,p^\nu} = \sum_{x=0}^{p^\nu-1} e\left(\frac{a}{p^\nu} x^k\right)$$

中, 我们令 $x = p^{\nu-1}y + z$, 其中 $0 \leq y < p$, $0 \leq z < p^{\nu-1}$ 。那么

$$x^k \equiv z^k + kp^{\nu-1}z^{k-1}y \pmod{p^\nu},$$

因为 $2(\nu-1) \geq \nu$ 。因此

$$S_{a,p^\nu} = \sum_{z=0}^{p^{\nu-1}-1} \sum_{y=0}^{p-1} e\left(\frac{az^k}{p^\nu} + \frac{akz^{k-1}y}{p}\right).$$

由于 $ak \not\equiv 0 \pmod{p}$, 内层和为 0, 除非 $z \equiv 0 \pmod{p}$, 此时它等于 p 。因此, 若 $z = pw$,

$$S_{a,p^\nu} = p \sum_{w=0}^{p^{\nu-2}-1} e\left(\frac{aw^k}{p^{\nu-k}}\right).$$

若 $\nu \leq k$, 则最后这个和中所有项都为 1, 于是得到 $S_{a,p^\nu} = p^{\nu-1}$ 。若 $\nu > k$, 一般项是 w 的周期函数, 周期为 $p^{\nu-k}$, 因而

$$S_{a,p^\nu} = p p^{k-2} S_{a,p^{\nu-k}}.$$

这就证明了这两个结果。(再次注意 p 可以等于 2。)

■

引理 6.3. 引理6.2的第二个结果在 $p \mid k$ 时也成立。

证. 像之前一样令 $k = p^\tau k_0$, 并注意由于 $\nu > k$, 我们有

$$\nu > p^\tau k_0 \geq 2^\tau \geq \tau + 1,$$

因而 $\nu \geq \tau + 2$ 。事实上, $k \geq \tau + 2$, 因为当 $\tau = 1$ 时 $k \geq 6$ 。

我们修改前面的证明, 令

$$x = p^{\nu-\tau-1}y + z, \quad 0 \leq y < p^{\tau+1}, \quad 0 \leq z < p^{\nu-\tau-1}.$$

我们将要证明

$$x^k \equiv z^k + kp^{\nu-\tau-1}z^{k-1}y \pmod{p}. \quad (6.6)$$

假定这一点, 则证明可以像之前一样完成。因为这样一来

$$S_{a,p^\nu} = \sum_{z=0}^{p^{\nu-\tau-1}-1} \sum_{y=0}^{p^{\tau+1}-1} e\left(\frac{az^k}{p^\nu} - \frac{ak_0z^{k-1}y}{p}\right),$$

并且内层和同样为 0, 除非 $z \equiv 0 \pmod{p}$, 因而

$$\begin{aligned} S_{a,p^\nu} &= p^{\tau+1} \sum_{w=0}^{p^{\nu-\tau-2}-1} e\left(\frac{aw^k}{p^{\nu-k}}\right) \\ &= p^{\tau+1} p^{k-\tau-2} S_{a,p^{\nu-k}}. \end{aligned}$$

这就证明了 (6.5)。还需证明同余式 (6.6)。只需证明

$$(z + p^{\nu-\tau-1}y)^{p^\tau} \equiv z^{p^\tau} + p^{\nu-1}z^{p^\tau-1}y \pmod{p^\nu}$$

即可, 因为接下来把两边升到 k_0 次方不会带来任何困难。令 $\nu - \tau - 1 = \lambda$, 我们要证明

$$(z + p^\lambda y)^{p^\tau} \equiv z^{p^\tau} + p^{\lambda+\tau}z^{p^\tau-1}y \pmod{p^{\lambda+\tau+1}}. \quad (6.7)$$

这并不像看上去那样显然，因为并非 $(A + B)^{p^\tau}$ 展开式中的所有二项式系数都能被 p^τ 整除。然而，我们可以分阶段证明此结果（换句话说，对 τ 作归纳）。我们首先证明

$$(z + p^\lambda y)^p \equiv z^p + p^{\lambda+1} z^{p-1} y \pmod{p^{\lambda+2}} \quad (6.8)$$

其中要求 $\lambda \geq 1$ （当 $p > 2$ 时）或 $\lambda \geq 2$ （当 $p = 2$ 时）。二项式展开中唯一需要检验的项是最后一项；对此我们需要 $\lambda p \geq \lambda + 2$ ，而当 $p > 2$ 且 $\lambda \geq 1$ 时，或当 $p = 2$ 且 $\lambda \geq 2$ 时，这是成立的。

最后，(6.7) 通过对 (6.8) 的重复应用而得出；在下一阶段我们得到

$$\begin{aligned} (z + p^\lambda y)^{p^2} &= (z^p + p^{\lambda+1} z^{p-1} y_1)^p \\ &\equiv z^{p^2} + p^{\lambda+2} z^{p^2-1} y_1 \pmod{p^{\lambda+3}} \\ &\equiv z^{p^2} + p^{\lambda+2} z^{p^2-1} y \pmod{p^{\lambda+3}}, \end{aligned}$$

其中 $y_1 \equiv y \pmod{p}$ ，并且我们在此用 $\lambda + 1$ 替代 λ 应用了 (6.8)。论证继续下去，便给出 (6.7)。

当 $\lambda = \nu - \tau - 1$ 时，关于 λ 的条件得到满足。我们已经看到 $\nu - \tau - 1 \geq 1$ ，而如前所注，若 $p = 2$ 则有 $\nu \geq k + 1 \geq \tau + 3$ 。因此证明完成。 ■

引理 6.4. 当 $(a, q) = 1$ 时， $|S_{a,q}| \ll q^{1-1/k}$ 。

证. 令 $T(a, q) = q^{-1+1/k} S_{a,q}$ 。我们要证明 $T(a, q)$ 有一个与 q 无关的界。若 $q = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdots$ ，则由引理5.1证明中 $S_{a,q}$ 的乘性性质，

$$T(a, q) = T(a_1, p_1^{\nu_1}) T(a_2, p_2^{\nu_2}) \cdots,$$

其中 $a_1, a_2, \dots$ 取适当的值，每一个都与相应的 p^ν 互素。由引理6.2的第二部分以及引理6.3，我们有

$$T(a, p^\nu) = T(a, p^{\nu-k})$$

对 $\nu > k$ 成立, 于是我们可以假定所有 ν_i 都 $\leq k$ 。

由引理6.1,

$$T(a, p) \leq kp^{1/2}p^{-(1-1/k)} \leq kp^{-1/6},$$

而由引理6.2的第一部分,

$$T(a, p^\nu) = p^{\nu-1}p^{-\nu(1-1/k)} \leq 1 \quad \text{当 } 1 < \nu \leq k.$$

因此 $T(a, p^\nu) \leq 1$, 除非可能在 $\nu = 1$ 且 $p \leq k^6$ 的情形。于是

$$T(a, q) \leq \prod_{p \leq k^6} (kp^{-1/6}),$$

而右边的数与 q 无关。 ■

定理 6.1. 若 $s \geq 2k + 1$, 则奇异级数 $\mathfrak{S}(N)$ 以及乘积 $\prod_p \chi(p)$ 绝对收敛, 并且

$$\mathfrak{S}(N) \geq C_1(k, s) > 0$$

若 $s \geq 2k + 1$ (k 为奇数) 或 $s \geq 4k$ (k 为偶数)。

证. 绝对收敛性如前所述得出, 只需用引理6.4代替引理3.1的推论; 而最后的断言由引理5.6及引理5.2的推论得出。 ■

定理6.1表明, 就奇异级数本身而言 (除 $k = 4$ 外), 在改进条件 $s \geq 2k + 1$ 使其成立方面不会有任何困难。困难的关键在于次弧 (minor arcs), 而不在奇异级数。

注. 哈代 (Hardy) 与李特尔伍德 (Littlewood) 证明了奇异级数, 以

$$\sum_{q=1}^{\infty} A(q)$$

的形式，当 $s \geq 4$ 时绝对收敛，对乘积形式也同样成立。其要旨在于确保对 a 求和时所发生的抵消，即

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q (q^{-1} S_{a,q})^s e\left(\frac{-Na}{q}\right).$$

然而，这种绝对收敛对 N 不再是一致的。若取 $q^{-1} S_{a,q}$ 的绝对值，则定理 6.1 中的条件 $s \geq 2k + 1$ 是最优的 (best possible)。

一个有趣的问题是：奇异级数之和 $\mathfrak{S}(N)$ 是如何随 N 波动的。每个因子 $\chi(p)$ 主要取决于 N 所属的剩余类（模 p^7 ）。随 N 波动最大的因子是那些 p 整除 k 的因子，但那些 $p - 1$ 与 k 有较大公因子的因子也可能波动得相当可观。

在他们早期的论文中，哈代与李特尔伍德主要使用 $\mathfrak{S}(N)$ 的用指数和 $S_{a,q}$ 表示的定义，而不是用同余式（模 p^ν ）的表达式。在 P.N. II [38] 中，他们必须证明 $\mathfrak{S}(N)$ 在 $k = 4$ 、 $s = 21$ 情形下有正下界。在此情形下波动最大的因子 $\chi(p)$ 是 $\chi(2)$ 和 $\chi(5)$ ；所有其他因子之积与 1 相差不大。他们发现 $\chi(5)$ 在约 0.7 与 1.3 之间变化。但 $\chi(2)$ 的变化幅度约为 200 倍。哈代与李特尔伍德证明了（在所提及的特定情形下）

$$\begin{aligned} \chi(2) = & 1 - 1.3307 \cos \frac{(2N - 5)\pi}{16} + 0.415 \cos \frac{(6N + 1)\pi}{16} \\ & - 0.3793 \cos \frac{(2N + 3)\pi}{8} + \varepsilon(N), \end{aligned}$$

其中 $|\varepsilon(N)| < 0.002$ 。可以验证，当 $N \equiv 2$ 或 $3 \pmod{16}$ 时， $\chi(2)$ 变得非常小（但仍为正）。当 $N \equiv 10$ 或 $11 \pmod{16}$ 时它相对较大。这些结果对应于这样一个事实： $x^4 \equiv 0$ 或 $1 \pmod{16}$ ，因而在

$x_1^4 + \cdots + x_{21}^4 \equiv N \pmod{16}$ 中对 $x_1, \dots, x_{21}$ 的选择, 在前一种情形下要比后一种情形下受到更多的限制。