

方程 $c_1x_1^k + \cdots + c_sx_s^k = N$

The equation $c_1x_1^k + \cdots + c_sx_s^k = N$

我们接下来考虑这样一个问题：把一个大正整数 N 表示成 $c_1x_1^k + \cdots + c_sx_s^k$ 的形式，其中 $c_1, \dots, c_s$ 是给定的正整数，而 $x_1, \dots, x_s$ 是任意的正整数。如果不加任何进一步的假设，那么“当 $s \geq s_0(k)$ （对某个 $s_0(k)$ ）时每个大的 N 都可表示”这一结论是不成立的。因为假设 $c_1, \dots, c_{s-1}$ 都能被某个素数 p 整除，而 c_s 不能；那么一个不能被 p 整除的整数 N ，如果它对模 p 不具有与 c_s 相同的 k 次幂特征，就必然不可表示。

我们当然可以假设——在处理标题中的方程时—— $c_1, \dots, c_s$ 没有公因子。为了保证可解性，我们将发现有必要假设：同余式

$$c_1x_1^k + \cdots + c_sx_s^k \equiv N \pmod{p^\nu}$$

对每个素数 p 及一切足够大的 ν 都可解，并且其中各项 $c_1x_1^k, \dots, c_sx_s^k$ 不全被 p 整除（或者作出某个可由此推出的其他假设）。

只需对前面的工作作出微小的改动，就能使之适用于这个更一般的方程。我们定义 $P_j = [(N/c_j)^{1/k}]$ 为 $(N/c_j)^{1/k}$ 的整数部分，并定义

$$T_j(\alpha) = \sum_{x=1}^{P_j} e(\alpha c_j x^k). \quad (7.1)$$

Weyl 不等式（引理 3.1）适用于和式 $T_j(\alpha)$ ；若 $\alpha = a/q + \beta$ 且 $|\beta| < q^{-2}$ ，则 $c_j\alpha = c_ja/q + c_j\beta$ ，且 $|c_j\beta| \ll q^{-2}$ 。这对于引理 3.1 的证明而言已经足够，因为关于 β 我们所用到的全部仅是 $|\beta| \ll q^{-2}$ 。

Hua 不等式 (引理 3.2) 对任何一个这样的和式依然成立, 因为

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 |T_j(\alpha)|^{2^k} d\alpha &= \int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{P_j} e(\alpha c_j x^k) \right|^{2^k} d\alpha \\
 &= \frac{1}{c_j} \int_0^{c_j} \left| \sum_{x=1}^{P_j} e(\alpha x^k) \right|^{2^k} d\alpha \\
 &= \int_0^1 \left| \sum_{x=1}^{P_j} e(\alpha x^k) \right|^{2^k} d\alpha \quad (\text{由周期性}) \\
 &\ll P_j^{2^k - k + \varepsilon}.
 \end{aligned}$$

这个不等式同样可经 Hölder 不等式推广到任意 2^k 个和式之积; 我们得到

$$\int_0^1 |T_1(\alpha) \cdots T_{2^k}(\alpha)| d\alpha \ll (P_1 \cdots P_{2^k})^{1-k/2^k+\varepsilon}. \quad (7.2)$$

我们像之前一样定义主弧与次弧。引理 4.1 现在表明: 若 $s \geq 2^k + 1$, 则

$$\int_{\mathfrak{m}} |T_1(\alpha) \cdots T_s(\alpha)| d\alpha \ll P^{s-k-\delta'},$$

其证明与之前相同, 需用到 (7.2)。引理 4.2 保持不变, 只是其中的 $I(\beta)$ 要替换为

$$I_j(\beta) = \int_0^{P_j} e(\beta c_j \xi^k) d\xi.$$

不过, 若把上限替换为 $P c_j^{-1/k}$ (其中 $P = N^{1/k}$), 后面的计算会稍微简化一些; 二者之差可忽略不计。

引理 4.3 与定理 4.1 的证明只需作出极轻微的改动即可适用于当前问题。一处差别在于: 为把 $I_j(\beta)$ 表示成 $\int_0^1 e(\gamma \xi^k) d\xi$ 的形式而在其中作的变量替换, 会产生一个因子 $|c_j|^{-1/k}$ 。另一处差别是: 奇异级数现在具有稍微更一般的形式; 它现在由下式给出

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q q^{-s} S_{c_1 a, q} \cdots S_{c_s a, q} e(-Na/q). \quad (7.3)$$

为了利用引理 3.1 的推论（或当 $s \geq 2k + 1$ 时利用引理 6.4）来确立此级数在 $s \geq 2k + 1$ 时的绝对收敛性，我们需要把对 $S_{a,q}$ （当 $(a, q) = 1$ 时）的估计加以推广，使之适用于 $S_{ca,q}$ ，其中 c 是任一固定的正整数。这很容易办到，因为若 $ca/q = a'/q'$ ，则

$$S_{ca,q} = \frac{q}{q'} S_{a',q'},$$

而 q/q' 作为 c 的因子是有界的。

这样我们就能证明定理 4.1 的如下更一般的形式：

定理 7.1. 设 $c_1, \dots, c_s$ 为固定的正整数。则当 $s \geq 2k + 1$ 时，把 N 表示为

$$N = c_1 x_1^k + \cdots + c_s x_s^k, \quad (x_1, \dots, x_s > 0),$$

的表示个数 $r(N)$ 满足

$$r(N) = \frac{C_{k,s}}{(c_1 c_2 \cdots c_s)^{1/k}} N^{s/k-1} \mathfrak{S}(N) + O(N^{s/k-1-\delta}) \quad (7.4)$$

其中 $\delta > 0$ 为某个固定常数， $C_{k,s}$ 同定理 4.1 中所定义，而 $\mathfrak{S}(N)$ 由 (7.3) 定义。该级数 (7.3) 在 $s \geq 2k + 1$ 时绝对收敛。

关于奇异级数的因子分解、以及奇异级数与 $M(p^\nu)$ 之间关系的引理 5.1、5.2、5.3 仍然适用。于是，为使 $\mathfrak{S}(N)$ 具有一个与 N 无关的正下界，只需对每个 p ，使同余式

$$c_1 x_1^k + \cdots + c_s x_s^k \equiv N \pmod{p^\nu}$$

的解数 $M(p^\nu)$ 满足

$$M(p^\nu) \geq C_p p^{\nu(s-1)}$$

对一切足够大的 ν 成立。

像之前一样定义 γ ，并利用引理 5.4，我们如同在引理 5.5 中那样发现：上述条件的一个充分条件是同余式

$$c_1 x_1^k + \cdots + c_s x_s^k \equiv N \pmod{p^\nu} \quad (7.5)$$

有一解，其中 $c_1 x_1^k, \dots, c_s x_s^k$ 不全被 p 整除。于是：

定理 7.2. 设 γ 由 (5.11) 定义。假设 $s \geq 2k + 1$ ，并假设对每个¹素数 p ，同余式 (7.5) 有一个解，其中 $c_1 x_1^k, \dots, c_s x_s^k$ 不全被 p 整除。则对一切满足此假设的 N ，我们有

$$\mathfrak{S}(N) \geq C(k, s) > 0.$$

由定理 7.1 与 7.2，若 $s \geq 2k + 1$ ，则当 $N \rightarrow \infty$ 时 $r(N) \rightarrow \infty$ ，前提是把 N 限制为满足定理 7.2 中同余条件的那些数。由于该同余条件只在 $p \leq p_0$ 时才需要，而 γ 与 N 无关，因此满足该同余条件的数 N 将包括某些算术级数中的一切数。

如果我们作出“系数 $c_1, \dots, c_s$ 两两互素”这一假设，那么可以证明：只要 s 超过 k 的某个特定函数，则该同余条件对一切 N 都满足。我们证明：

定理 7.3. 假设对 $1 \leq i < j \leq s$ 有 $(c_i, c_j) = 1$ ，并假设 $s \geq k(2k - 1) + 2$ (k 为奇数) 或 $s \geq 2k(4k - 1) + 2$ (k 为偶数)。则

$$\mathfrak{S}(N) \geq C(k, s) > 0.$$

证. 我们要证明: 在所述条件下, 同余式 (7.5) 有一个解, 其中 $c_1x_1^k, \dots, c_sx_s^k$ 不全被 p 整除。由于 $c_1, \dots, c_s$ 中至多有一个能被 p 整除, 因此只要解出

$$c_1x_1^k + \dots + c_sx_s^k \equiv N \pmod{p^\gamma} \quad (7.6)$$

就足够了, 其中 $x_1, \dots, x_{s-1}$ 不全被 p 整除, 且假定 $c_1, \dots, c_{s-1}$ 中没有一个能被 p 整除。

设 $p > 2$ 。我们在引理 5.6 的证明中已看到: 当 $z \not\equiv 0 \pmod{p}$ 时, 模 p^γ 下由 z^k 所取的值的个数是 $(p-1)/\delta$, 其中 $\delta = (k_0, p-1)$ 。因此模 p^γ 下 k 次幂剩余与非剩余的不同类的个数为

$$\frac{\phi(p^\gamma)}{(p-1)/\delta} = \frac{p^{\gamma-1}(p-1)\delta}{p-1} = p^{\gamma-1}\delta.$$

(这些类是在全体互素剩余类构成的群中、由 k 次幂所构成的子群的陪集。)

若我们按照系数 $c_1, \dots, c_{s-1}$ 所属的 k 次幂剩余或非剩余之类, 把它们分入若干集合, 则将有某一类至少包含 $(s-1)/p^{\gamma-1}\delta$ 个系数。设 t 为不小于 $(s-1)/p^{\gamma-1}\delta$ 的最小整数。我们可以把这些考虑中的系数取为前 t 个系数, 于是 $c_2 \equiv d_2^k c_1, \dots, c_t \equiv d_t^k c_1 \pmod{p^\gamma}$, 其中 d_i 不被 p 整除。令变量 $x_{t+1}, \dots$ (在 (7.6) 中) 等于 0, 并约去 c_1 , 我们看到只需解出

$$x_1^k + (d_2x_2)^k + \dots + (d_tx_t)^k \equiv N' \pmod{p^\gamma}$$

其中诸变量不全被 p 整除。这实际上与引理 5.6 中关于 Waring 问题所考虑的同余式相同。我们在那里证明了: 只要 $t \geq 2k$, 该结论便成立。因此只需

$$\frac{s-1}{p^{\gamma-1}\delta} > 2k-1.$$

由于 $\gamma-1 = \tau$ 且 $p^\tau \delta \leq p^\tau k_0 = k$, 故只需 $s-1 > k(2k-1)$ 。

设 $p = 2$ 。首先，若 $\tau = 0$ （即 k 为奇数），则只要 N 为奇数，同余式 (7.6) 即可解，因为即使它只有一项， x^k 也取遍模 p^γ 的一切值。因此当 N 为奇或偶时，只要两项便可解，故只需 $s - 1 \geq 2$ 。于是当 k 为奇数时定理结论成立。

现设 $\tau \geq 1$ ，故 k 为偶数。由于每个系数 c_i ($i \leq s - 1$) 都是奇数，它对模 2^γ 可取 $2^{\gamma-1}$ 个可能值。因此存在某个由 t 个相互同余的系数构成的集合，其中 $t \geq (s - 1)/2^{\gamma-1}$ 。令对应于其余系数的变量等于 0，我们看到只需解出

$$x_1^k + \cdots + x_t^k \equiv N' \pmod{2^\gamma}$$

其中诸变量不全为偶数。如同在引理 5.6 的证明中那样，只要 $t \geq 4k$ 即可。因此只需

$$\frac{s - 1}{2^{\gamma-1}} > 4k - 1.$$

由于 $k \geq 2^\tau$ 且 $\gamma = \tau + 2$ ，我们有 $2^{\gamma-1} \leq 2k$ 。因此只需 $s - 1 > 2k(4k - 1)$ 。这就在 k 为偶数的情形证明了定理 7.3。 ■

由定理 7.1 与 7.3 可知：我们能够指定一个数 $s_1(k)$ ，使得当 $s \geq s_1(k)$ 时，当 $N \rightarrow \infty$ 时 $r(N) \rightarrow \infty$ ；这始终以系数 c_j 两两互素为前提。定理 7.3 中给出的数绝非最优；我们只不过给出了从证明中所用简单论证路线中自然出现的那些数。原则上，可以放宽系数两两互素这一条件；对于上述结论之成立而言，真正本质的是：对任一素数 p ，都有一定数量的系数不被 p 整除。

1. 当然，只需对 $p \leq p_0(k, s)$ 假设此条件即可；参见引理 5.2 的推论。↵