

华林问题：数 $G(k)$

Waring's problem: the number $G(k)$

数 $G(k)$ 被 (Hardy 和 Littlewood) 定义为具有如下性质的最小的 s 值：每个充分大的整数 N 都可以表示为 s 个正整数 k 次幂之和。由定理 4.1 和定理 5.1，我们已经知道 $G(k) \leq 2^k + 1$ 。从相反的方向看，由密度方面的考虑容易推出 $G(k) \geq k + 1$ ；事实上，满足

$$x_1^k + \cdots + x_k^k \leq X, \quad 0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k$$

的整数组 $x_1, \dots, x_k$ 的集合的个数，容易看出当 $X \rightarrow \infty$ 时渐近于 γX （这通过与一个重积分作比较得到），其中 $\gamma < 1$ ；从而存在许多不能表示为 k 个 k 次幂之和的数。利用同余条件常常可以推出一个更好的下界；我们有 $G(k) \geq \Gamma(k)$ ，其中 $\Gamma(k)$ 是第 4 章中定义的那个数。

当 k 较大时，对 $G(k)$ 存在更好的上界可用。1934 年，Vinogradov 证明了当 $k > k_0(\delta)$ 时 $G(k) < (6 + \delta)k \log k$ ，其中 δ 是任意小的正数 [92]。我们现在将给出该证明的一个阐述。¹ 数值系数 6 后来被 Vinogradov 于 1947 年改进为 3 [93]，但其证明较为困难。

读者将记得，在第 4 章中我们把 α 的积分区间分为主弧和次弧，主弧由那些容许有理逼近 a/q 的 α 组成，其中

$$q \leq P^\delta, \quad |\alpha - a/q| < P^{-k+\delta}.$$

与华林问题研究中通常所需者相比，这些主弧的数目特别少而且长度特别短。之所以能够作这样的选取，是由于华的非常有效的估计（引理 3.2），它在

$\int |T(\alpha)|^{2^k} d\alpha$ 的估计中“节省”了几乎 P^k 。在现在的处理中，我们不能在次弧上的 α 的积分中纳入这么多。因此我们需要一个比引理 4.2 证明中所用的非常粗糙的方法更有效的、在主弧上对 $T(\alpha)$ 的逼近方法。问题本质上是用积分代替求和的问题，我们将采用 van der Corput 的下述引理，它本身也有独立的意义。

引理 9.1. (van der Corput) 设 $f(x)$ 是一个实函数，在 $A \leq x \leq B$ 上二次可微。又设在此区间内

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}, \quad f''(x) \geq 0.$$

那么

$$\sum_{A \leq n \leq B} e(f(n)) = \int_A^B e(f(x)) dx + O(1).$$

证. 只需对 A, B 为整数且 $A < B$ 的情形证明结果，且当端项 $n = A$ 、 $n = B$ 计入求和时取因子 $\frac{1}{2}$ 。把 $f(x)$ 换成 $f(x) + c$ （这等价于把求和与积分都乘以 $e^{2\pi ic}$ ），我们可以保证求和与积分之差是实数，这就允许我们把两边的 $e(f(x))$ 换成 $\cos(2\pi f(x))$ 。

令 $\Psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ 。那么，对任意整数 m 以及任意可微函数 $F(x)$ ，我们有

$$\int_m^{m+1} \Psi(x) F'(x) dx = \frac{1}{2} \{F(m+1) + F(m)\} - \int_m^{m+1} F(x) dx.$$

对 $m = A, A+1, \dots, B-1$ 求和，我们得到

$$\sum_{n=A}^{B-1} F(n) = \int_A^B F(x) dx + \int_A^B \Psi(x) F'(x) dx,$$

其中撇号表示端项计以因子 $\frac{1}{2}$ 。于是问题归结为证明

$$I = \int_A^B \Psi(x) (\cos(2\pi f(x)))' dx$$

的绝对值有界。

我们回忆, 对任意非整数的 x ,

$$\Psi(x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\nu x}{\pi\nu}.$$

因此

$$\begin{aligned} I &= -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\pi} \int_A^B (\sin 2\pi\nu x) (\cos(2\pi f(x)))' dx \\ &= 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_A^B (\sin 2\pi\nu x) (\sin(2\pi f(x))) f'(x) dx \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_A^B f'(x) \{ \cos(2\pi(\nu x - f(x))) - \cos(2\pi(\nu x + f(x))) \} dx. \end{aligned}$$

第一行中求和与积分次序的交换, 可借助 $\Psi(x)$ 的级数的有界收敛性轻易地证明合理。我们将证明

$$\left| \int_A^B f'(x) \cos(2\pi(\nu x \pm f(x))) dx \right| < \frac{1}{\pi(2\nu - 1)},$$

这将蕴含

$$|I| < \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(2\nu - 1)} < \frac{2}{\pi},$$

从而给出所需的结果。

我们把积分写为

$$\frac{1}{2\pi} \int_A^B \frac{f'(x)}{\nu \pm f'(x)} \phi'(x) dx,$$

其中

$$\phi(x) = \sin(2\pi(\nu x \pm f(x))),$$

并诉诸中值定理。第二个因子 $\phi'(x)$ 具有这样的性质：它在任意两个上下限之间的积分的绝对值至多为 2。第一个因子是单调的（对每个正整数 ν ），其导数为

$$\frac{\nu f''(x)}{(\nu \pm f'(x))^2} \geq 0.$$

第一个因子的最大值至多为 $1/(2\nu - 1)$ 。因此

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_A^B \frac{f'(x)}{\nu \pm f'(x)} \phi'(x) dx \right| \leq \frac{1}{\pi(2\nu - 1)},$$

正如上面所断言。于是引理 9.1 的证明完成。 ■

我们为本章的目的定义主弧 $\mathfrak{M}_{a,q}$ ，它由如下区间组成：

$$(a, q) = 1, \quad 1 \leq a \leq q, \quad q \leq P^{1/2}, \quad |q\alpha - a| < \frac{1}{2kP^{k-1}}. \quad (9.1)$$

如同第 2 章，我们定义

$$T(\alpha) = \sum_{x=1}^P e(\alpha x^k).$$

更精确的结果，它取代了引理 4.2，如下所述。

引理 9.2. 对 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 中的 α ，我们有

$$T(\alpha) = q^{-1} S_{a,q} I(\beta) + O(q), \quad (9.2)$$

其中记号同第 4 章。

证. 像引理 4.2 的证明中那样, 令 $x = qy + z$, 我们得到

$$T(\alpha) = \sum_{z=1}^q e(az^k/q) \sum_y e(\beta(qy + z)^k),$$

其中对 y 的求和遍历 $0 < qy + z \leq P$ 。若

$$f(y) = \beta(qy + z)^k,$$

则 (对 $\beta > 0$)

$$f'(y) = k\beta q(qy + z)^{k-1} < k(2kP^{k-1})^{-1}P^{k-1} = \frac{1}{2},$$

这里用到 (9.1)。又 $f''(y) \geq 0$ 。因此引理 9.1 适用; 而当 $\beta < 0$ 时, 对复共轭和同样适用。于是我们可以把对 y 的内和换成

$$\int e(\beta(q\eta + z)^k) d\eta + O(1),$$

这就导致 (9.2)。 ■

注. 可以看出, (9.1) 中的条件 $q \leq P^{1/2}$ 在证明中并未用到, 不过当然, 若允许 q 接近 P 那么大, 则结果失去其价值。

还有一个更有效的逼近 $T(\alpha)$ 的方法。若假定 $q \leq P^{1-\delta}$ 且 $|q\alpha - a| < P^{-k+1-\delta}$, 则¹

$$T(\alpha) = q^{-1}S_{a,q}I(\beta) + O\left(q^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right).$$

值得注意的是, 这里误差项中的指数竟与 k 无关。

引理 9.3. 设 $s \geq 4k$ 。那么, 对

$$\frac{1}{5}P^k \leq M \leq P^k, \quad (9.3)$$

我们有

$$\int_{\mathfrak{M}} T(\alpha)^s e(-M\alpha) d\alpha \gg P^{s-k}, \quad (9.4)$$

其中 $\mathfrak{M}$ 表示主弧 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 的全体。

注. 我们之所以想要对一个 M 值范围（而非单个数）得到该结果，其理由稍后将显现；它将省去我们在主弧上对一个相当复杂的指数和作逼近的麻烦。

证. 对某个特定区间 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 上的 α ，我们有 (9.2)，第一步是把该逼近升到 s 次幂。由引理 6.4，我们有

$$q^{-1}|S_{a,q}| \ll q^{-1/k};$$

又

$$I(\beta) \ll \min(P, |\beta|^{-1/k}).$$

第一个估计 P 是平凡的，第二个则来自把 $I(\beta)$ 写为

$$\frac{1}{k} |\beta|^{-1/k} \int_0^{P^k |\beta|} e(\pm \eta) \eta^{-1+1/k} d\eta$$

并注意到最后那个积分有界。因此 (9.2) 中的主项的绝对值

$$\ll q^{-1/k} \min \left(P, |\beta|^{-1/k} \right).$$

误差项 q 不超过此值，因为由 (9.1)，

$$q^{1+1/k} < P \quad \text{且} \quad q^{1+1/k} < |\beta|^{-1/k}.$$

因此

$$T(\alpha)^s = (q^{-1}S_{a,q}I(\beta))^s + O\left\{qq^{-(s-1)/k}\left(\min\left(P, |\beta|^{-1/k}\right)\right)^{s-1}\right\}.$$

此处的误差项，关于 β 积分后（ β 的范围无关紧要——可取 $(-\infty, \infty)$ ）变为

$$\ll q^{1-(s-1)/k}P^{s-1-k}.$$

当它对 a （至多 q 个值）求和并对 $q \leq P^{1/2}$ 求和时，给出最终误差项

$$\ll P^{s-1-k} \sum_q q^{2-(s-1)/k} \ll P^{s-k-1},$$

因为该级数收敛（ $s-1 > 3k$ ）。

主项对 (9.4) 中积分的贡献是

$$\sum_q \sum_a (q^{-1}S_{a,q})^s e(-Ma/q) \int I^s(\beta) e(-M\beta) d\beta,$$

其中求和与积分的条件由 (9.1) 决定。我们可以把对 β 的积分扩展到 $(-\infty, \infty)$ ，因为根据对 $|I(\beta)|$ 的估计，所得到的误差是

$$\begin{aligned} &\ll \sum_q qq^{-s/k} \int_{(2kq)^{-1}P^{1-k}}^{\infty} \beta^{-s/k} d\beta \\ &\ll \sum_q q^{1-s/k} q^{s/k-1} P^{(k-1)(s/k-1)} \\ &\ll P^{s-k-s/k+3/2} \ll P^{s-k-1}. \end{aligned}$$

通过一个简单的变量替换，

$$I(\beta) = Pk^{-1} \int_0^1 e(\beta P^k \eta) \eta^{-1+1/k} d\eta = Pk^{-1} I_1(\beta P^k),$$

记之如是。令 $\beta = P^{-k}\gamma$ ，我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} I^s(\beta) e(-M\beta) d\beta = P^{s-k} k^{-s} \int_{-\infty}^{\infty} I_1^s(\gamma) e(-\theta\gamma) d\gamma,$$

其中 $\theta = M/P^k$, 使得 $\frac{1}{5} \leq \theta \leq 1$ 。如同定理 4.1 的证明, 由 Fourier 积分定理可知, 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_1^s(\gamma) e(-\theta\gamma) d\gamma$$

等于

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \{\zeta_1 \cdots \zeta_{s-1} (\theta - \zeta_1 - \cdots - \zeta_{s-1})\}^{-1+1/k} d\zeta_1 \cdots d\zeta_{s-1},$$

其中积分在满足 $\zeta_1 + \cdots + \zeta_{s-1} < \theta$ 的 $\zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}$ 上进行。因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_1^s(\gamma) e(-\theta\gamma) d\gamma = \theta^{s/k-1} \frac{\Gamma(1/k)^s}{\Gamma(s/k)},$$

又因 $\theta \geq 1/5$, 我们代入得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} I^s(\beta) e(-M\beta) d\beta \gg P^{s-k}.$$

现在只需对

$$\sum_{q \leq P^{1/2}} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q (q^{-1} S_{a,q})^s e(-Ma/q)$$

得到一个正的下界。这个级数可以延拓到无穷, 所产生的误差由 P 的一个负幂界定; 这由引理 6.4 得出, 因为 $s \geq 4k > 2k + 1$ 。于是它变为 $\mathfrak{S}(M)$, 而由定理 6.1, 它有一个不依赖于 M 的正的下界。于是引理 9.3 得证。 ■

现在我们来证明的主要思想。这就是: 考虑一个大数 N 的形如

$$N = x_1^k + \cdots + x_{4k}^k + u_1 + u_2 + y^k v \quad (9.5)$$

的表示, 其中

- (i) $1 \leq x_j \leq P$;

- (ii) u_1 和 u_2 遍历所有小于 $\frac{1}{4}P^k$ 且可表示为 ℓ 个正整数 k 次幂之和的不同的数;
- (iii) $1 \leq y \leq P^{1/2k}$;
- (iv) v 遍历小于 $\frac{1}{4}P^{k-1/2}$ 且可表示为 ℓ 个正整数 k 次幂之和的不同的数。

这样我们将把 N 表示为 $4k + 3\ell$ 个正整数 k 次幂之和。为了证明表示存在，我们以后必须用 k 来选取 ℓ 。我们将选取

$$P = [N^{1/k}] + 1;$$

这将保证

$$\frac{1}{5}P^k < N - u_1 - u_2 - y^k v < P^k. \quad (9.6)$$

对 u_1, u_2, v 这样的数的个数有一个下界是至关重要的，这样的下界由下述引理提供。

引理 9.4. (Hardy 和 Littlewood) 设 $U_\ell(X)$ 表示直到 X 为止、可表示为 ℓ 个正整数 k 次幂之和的不同的数的个数。那么，只要 $X > X_0(k, \ell)$ ，我们就有

$$U_\ell(X) \gg X^{1-\lambda^\ell}, \quad \lambda = 1 - \frac{1}{k}. \quad (9.7)$$

证. 当 $\ell = 1$ 时结果成立，因为此时该个数为 $[X^{1/k}]$ ，而 (9.7) 右边的数为 $X^{1/k}$ 。一般结果对 ℓ 用归纳法证明。考虑形如 $x^k + z$ 的数，其中

$$\left(\frac{1}{4}X\right)^{1/k} < x < \left(\frac{1}{2}X\right)^{1/k}$$

且

$$0 < z < \frac{1}{2}X^{1-1/k},$$

而 z 可表示为 $\ell - 1$ 个正整数 k 次幂之和。这些数全都互不相同，因为若

$$x_1^k + z_1 = x_2^k + z_2, \quad x_1 > x_2,$$

我们得到

$$x_1^k - x_2^k > kx_2^{k-1} > k\left(\frac{1}{4}X\right)^{1-1/k} > \frac{1}{2}X^{1-1/k},$$

而

$$z_2 - z_1 < z_2 < \frac{1}{2}X^{1-1/k},$$

这是矛盾。 x 的可能取值个数 $\gg X^{1/k}$ ，而 z 的取值个数为 $U_{\ell-1}\left(\frac{1}{2}X^{1-1/k}\right)$ ，于是我们有

$$U_{\ell}(X) \gg X^{1/k} U_{\ell-1}\left(\frac{1}{2}X^{1-1/k}\right).$$

若 (9.7) 在以 $\ell - 1$ 代 ℓ 时的类比成立，我们得到

$$U_{\ell}(X) \gg X^{1/k} X^{(1-1/k)(1-\lambda^{\ell-1})} = X^{1-\lambda^{\ell}},$$

故 (9.7) 本身成立。这就证明了结果。 ■

注. 对一般的 k ，没有比 (9.7) 实质上更好的结果为人所知，任何真正的改进都将是有意義的。对小的 k ，存在更好的结果（参见 Davenport 的论文 [19]）。

推论. 设

$$R(\alpha) = \sum_{u < \frac{1}{4}P^k} e(\alpha u), \quad (9.8)$$

其中 u 遍历可表示为 ℓ 个 k 次幂之和的不同的数。那么

$$\int_0^1 |R(\alpha)|^2 d\alpha = R(0) \ll P^{-k(1-\lambda^\ell)} R^2(0). \quad (9.9)$$

证. 第一个结果是直接的, 对任何 u 遍历一组不同整数的指数和 $\sum e(\alpha u)$ 都成立。第二个结果由下述事实得出:

$$R(0) = U_\ell \left(\frac{1}{4} P^k \right) \gg P^{k(1-\lambda^\ell)}.$$

注. 用 $R(0)$ 作为指示指数和 $R(\alpha)$ 中项数的手段是方便的, 这样可以避免引入新的记号。(9.9) 中积分的平凡估计将是 $R^2(0)$, 并且可以看出, 与之相比我们节省了 P 的指数中的量 $k(1 - \lambda^\ell)$ 。我们最终将这样选取 ℓ : 使 λ^ℓ (即 $(1 - 1/k)^\ell$) 约为 $1/Ck^2$, 从而节省量约为 $k - 1/Ck$ 。当 α 在次弧 m 中时, 将有必要节省更多一些, 即比 $1/Ck$ 更多, 这将由对应于 (9.5) 中最后一项 $y^k v$ 的指数和的一个估计来实现。这个估计依赖于下述非常一般的引理, 其原理在 Vinogradov 的大部分工作中起着重要作用。

引理 9.5. (Vinogradov) 设 x 遍历一个含于长度为 X 的区间内的 X_0 个不同整数所成的集合, 又设 y 遍历一个含于长度为 Y 的区间内的 Y_0 个不同整数所成的集合。设 $\alpha = a/q + O(q^{-2})$, 其中 $(a, q) = 1$, $q > 1$ 。那么

$$\left| \sum_x \sum_y e(\alpha xy) \right|^2 \ll X_0 Y_0 \frac{\log q}{q} (q + X)(q + Y). \quad (9.10)$$

证. 记此和为 S , 我们有

$$|S|^2 \leq \left(\sum_x 1 \right) \left(\sum_x \left| \sum_y e(\alpha xy) \right|^2 \right)$$

$$\leq X_0 \sum_{x=x_1}^{x_1+X} \sum_y \sum_{y'} e(\alpha x(y - y')),$$

其中现在 x 遍历含原集合的区间中的所有整数，而 y, y' 仍受限制。对 x 求和后，我们得到

$$|S|^2 \ll X_0 \sum_y \sum_{y'} \min(X, \|\alpha(y - y')\|^{-1}).$$

现在 $|y - y'| \leq Y$ ，而 $y - y'$ 的每个值至多来自 Y_0 对 y, y' 。因此

$$|S|^2 \ll X_0 Y_0 \sum_{|t| \leq Y} \min(X, \|\alpha t\|^{-1}).$$

其余的论证与引理 3.1 证明中的本质上相同。对 t 之和被分为 q 个连续项组成的块，块的个数 $\ll Y/q + 1$ 。任一块中各项之和形如

$$\sum_{t=t_1+1}^{t_1+q} \min \left(X, \left\| \frac{at}{q} + \tau + O\left(\frac{1}{q}\right) \right\|^{-1} \right) \ll X + \sum_{1 \leq u \leq \frac{1}{2}q} \frac{q}{u} \ll X + q \log q$$

因此

$$|S|^2 \ll X_0 Y_0 (Y/q + 1) (X + q \log q),$$

这就蕴含 (9.10)。 ■

推论. 设

$$S(\alpha) = \sum_y \sum_v e(\alpha y^k v), \quad (9.11)$$

其中求和的条件是前面 (iii) 和 (iv) 中所给的那些。那么，若 $\alpha = a/q + O(q^{-2})$ ，且

$$P^{1/2} < q \leq 2kP^{k-1},$$

我们有

$$|S(\alpha)| \ll S(0)P^{-\frac{1}{4k} + \frac{1}{2}(k-\frac{1}{2})\lambda^\ell}. \quad (9.12)$$

证. 该和是引理中之和的一个实例, 其中

$$X = \frac{1}{4}P^{k-\frac{1}{2}}, \quad X_0 = U_\ell \left(\frac{1}{4}P^{k-\frac{1}{2}} \right),$$

$$Y = P^{1/2}, \quad Y_0 = P^{\frac{1}{2k}}.$$

因此

$$\begin{aligned} |S(\alpha)|^2 &\ll X_0 P^{\frac{1}{2k}} \frac{\log q}{q} \left(q + \frac{1}{4}P^{k-\frac{1}{2}} \right) \left(q + P^{1/2} \right) \\ &\ll X_0 P^{\frac{1}{2k}} (\log P) P^{k-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

由于

$$S(0) \gg P^{\frac{1}{2k}} X_0,$$

我们得到

$$\left| \frac{S(\alpha)}{S(0)} \right|^2 \ll P^{-\frac{1}{2k} + (k-\frac{1}{2})\lambda^\ell + \varepsilon} X_0^{-1},$$

又因由引理 9.4,

$$X_0 \gg P^{(k-\frac{1}{2})(1-\lambda^\ell)},$$

我们得到 (9.12)。 ■

注. 可以看出, 只要 λ^ℓ 较小, (9.12) 就在 P 的指数中比平凡估计节省了几乎 $1/4k$ 。

引理 9.6. 设 $\mathfrak{m}$ 表示次弧, 即 (9.1) 中区间 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 的补集。那么, 只要 $\ell \geq 2k \log 3k$, 我们就有

$$\int_{\mathfrak{m}} |T(\alpha)|^{4k} |R(\alpha)|^2 |S(\alpha)| d\alpha \ll P^{3k} R^2(0) S(0) P^{-\delta}$$

对某个固定的 $\delta > 0$ 成立。

证. 对每个 α 都存在 a, q , 使得

$$(a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq 2kP^{k-1}, \quad \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{2kqP^{k-1}},$$

且若 α 不在任何 $\mathfrak{M}_{a,q}$ 中, 则必有 $q > P^{1/2}$ 。注意 $|\alpha - a/q| < 1/(2kqP^{k-1})$ 。由引理 9.5 的推论,

$$|S(\alpha)| \ll S(0) P^{-\frac{1}{4k} + \frac{1}{2}(k - \frac{1}{2})\lambda^\ell}.$$

由引理 9.4 的推论,

$$\int_0^1 |R(\alpha)|^2 d\alpha \ll R^2(0) P^{-k+k\lambda^\ell}.$$

利用平凡估计 $|T(\alpha)| \leq P$, 我们看出叙述中的积分

$$\ll P^{3k} R^2(0) S(0) P^{-\frac{1}{4k} + \frac{3}{2}k\lambda^\ell}.$$

若 $\ell \geq 2k \log 3k$, 则

$$\log \lambda^\ell = \ell \log \left(1 - \frac{1}{k} \right) < -\frac{\ell}{k} < -2 \log 3k,$$

于是 $\lambda^\ell < (3k)^{-2}$, 并且

$$\frac{3}{2}k\lambda^\ell < \frac{1}{6k}.$$

因此结果成立。 ■

定理 9.1. $G(k) < 4k + 6k \log 3k + 3$ 。

证. 设 $r_1(N)$ 表示 N 在条件给定的特殊形式 (9.5) 下的表示个数。那么

$$r_1(N) = \int_0^1 T^{4k}(\alpha) R^2(\alpha) S(\alpha) e(-N\alpha) d\alpha.$$

由引理 3.1, 次弧 $\mathfrak{m}$ 对该积分的贡献的阶低于 $P^{3k} R^2(0) S(0)$, 只要 $\ell \geq 2k \log 3k$ 。

我们把主弧的贡献写为

$$\sum_{u_1} \sum_{u_2} \sum_y \sum_v \int_{\mathfrak{M}} T^{4k}(\alpha) e(\alpha(-N + u_1 + u_2 + y^k v)) d\alpha.$$

外层求和的项数为 $R^2(0) S(0)$, 而对这些项的任意取法, 我们都有

$$\frac{1}{5} P^k < N - u_1 - u_2 - y^k v < P^k,$$

正如前面所注意到的。于是, 由引理 9.3, 对 $\mathfrak{M}$ 上的积分 $\gg P^{3k}$, 因为现在 $s = 4k$ 。因此 $r_1(N) \gg P^{3k} R^2(0) S(0)$, 所以当 $N \rightarrow \infty$ 时 $r_1(N) \rightarrow \infty$ 。由此推出

$$G(k) \leq 4k + 3\ell \leq 4k + 3(2k \log 3k + 1),$$

这就给出结果。 ■

1. 我们这里主要依据 Heilbronn 的叙述 [44]。↵

2. 见 [18, 引理 8 和 9]。↵