

方程 $c_1x_1^k + \cdots + c_sx_s^k = 0$ (再论)

The equation $c_1x_1^k + \cdots + c_sx_s^k = 0$ again

我们回到这个方程，并把上一节的方法加以改造，以便在比定理 8.1 更弱的限制条件下确立它的可解性。与第 8 章一样，我们假定 $c_1, \dots, c_s$ 是固定的整数，没有一个等于 0，并且当 k 为偶数时它们不全同号。

设 $s_0 = s_0(k)$ 是一个整数，它具有如下性质：任何方程

$$c_1x_1^k + \cdots + c_{s_0}x_{s_0}^k = 0$$

的奇异级数都是正的。由第 8 章的工作，我们可以取

$$s_0 = k^2(2k - 1) + 1, \quad (10.1)$$

并且如那里所述，事实上可以取 $s_0 = k^2 + 1$ ，尽管我们并未证明这一点。

正如上一章那样，我们将需要关于相关方程

$$c_1x_1^k + \cdots + c_{s_0}x_{s_0}^k = M \quad (10.2)$$

的奇异级数 $\mathfrak{S}(M)$ 的一些知识。它分解为 $\prod_p \chi(p)$ ，而我们知道

$$\prod_{p > p_0} \chi(p) \geq \frac{1}{2}$$

对某个依赖于 k 与 s 、但不依赖于 M 的 p_0 成立；只要 s_0 仅仅 $\geq 2k + 1$ ，这就成立。于是，为了确保 $\mathfrak{S}(M)$ 对某一类整数 M 有一个不依赖于 M 的正的下界，只需对每个 $p \leq p_0$ ， $\chi(p)$ 有这样一个下界即可。

在第 8 章的工作中，我们（对每个 p ）施加了一个初步变换，化为加性形式，其依赖于整除系数 c_j 的 p 的幂次。此后我们得到一个形式

$$d_1 y_1^k + \cdots + d_v y_v^k,$$

其系数不被 p 整除，并且只要同余式

$$d_1 y_1^k + \cdots + d_v y_v^k \equiv 0 \pmod{p^\gamma}$$

有一个 $y_1, \dots, y_v$ 不全被 p 整除的解，这就足够了。我们证明了：当 $s \geq s_0$ 时这个条件被满足，其中 s_0 由 (10.1) 给出。

由此可知，对每个 p ，存在某个 $\gamma_1(p)$ （也依赖于系数 c_j ），使得当¹

$$M \equiv 0 \pmod{p^{\gamma_1(p)}}$$

时， $\chi(p)$ 有一个正的下界；因为这将保证最终必须求解的那个同余式与 $M = 0$ 时的同余式相同。令

$$L = \prod_{p \leq p_0} p^{\gamma_1(p)}.$$

那么，如果 $M \equiv 0 \pmod{L}$ ，就存在一个不依赖于特定 M 的、关于 $\chi(p)$ 的正下界，从而也存在关于 $\mathfrak{S}(M)$ 的正下界。

回到标题中的方程，我们取 $s = s_0 + 3\ell$ ，其中 ℓ 如第 9 章那样，并把系数分成若干组：

$$c_1, \dots, c_{s_0}; \quad d_1, \dots, d_\ell; \quad d'_1, \dots, d'_\ell; \quad e_1, \dots, e_\ell;$$

受到 $c_1, \dots, c_{s_0}$ 不全同号这一条件的约束。我们将确立方程

$$c_1 x_1^k + \cdots + c_{s_0} x_{s_0}^k + L^k(u_1 + u_2 + y^k v) = 0 \tag{10.3}$$

的可解性，受到如下约束：

$$\text{i. } 0 < x_j \leq P/|c_j|^{1/k};$$

- ii. u_1 是一个整数 $< \frac{1}{4}(P/L)^k$, 它可表为 $d_1 z_1^k + \cdots + d_\ell z_\ell^k$, 对带撇系数的 u_2 也类似;
- iii. $1 < y < (P/L)^{1/2k}$;
- iv. v 是一个整数 $< \frac{1}{4}(P/L)^{k-1/2}$, 它可表为 $e_1 t_1^k + \cdots + e_\ell t_\ell^k$ 。

当 $s = s_0 + 3\ell$ 时这将给出原方程的可解性, 从而当 $s \geq s_0 + 3\ell$ 时更是如此。

主弧与次弧的定义与第 9 章相同, 只是我们把 $2kqP^{k-1}$ 换成 $2kqcP^{k-1}$, 其中 $c = \max |c_j|$; 这是为了确保在对引理 9.2 的类比的证明中, 范德科普特 (van der Corput) 引理的条件得到满足。代替引理 9.3, 我们得到

$$\int_{\mathfrak{M}} T_1(\alpha) \cdots T_{s_0}(\alpha) e(-M\alpha) d\alpha \gg P^{s_0-k} \quad (10.4)$$

其前提是 $0 < M \leq P^k$ 且 $M \equiv 0 \pmod{L}$ 。这一证明与前面的不同之处仅在于奇异积分, 它变换成下式的一个倍数:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \{ \zeta_1 \cdots \zeta_{s_0-1} (\pm \zeta_1 \pm \cdots \pm \zeta_{s_0-1} - \theta) \}^{1-1/k} d\zeta_1 \cdots d\zeta_{s_0-1},$$

积分区域为范围 $0 < \pm \zeta_1 \pm \cdots \pm \zeta_{s_0-1} - \theta < 1$, 其中那些符号是 $c_1, \dots, c_{s_0-1}$ 的符号, 而我们已假定 c_{s_0} 是负的。我们可以设那些 $\pm$ 号中至少有两个是 $+$ 。那么, 对于 $0 \leq \theta \leq 1$, 积分区域包含某个大小不依赖于 θ 的小立方体, 从而上述积分有一个正的下界。

我们已经看到, 出现在引理 9.3 的类比中的奇异级数, 对于 $M \equiv 0 \pmod{L}$ 有一个正的下界, 因此我们得到 (10.4)。

引理 9.4 仍然适用, 只需作微小改动, 即可给出可表为

$$d_1 z_1^k + z$$

形状的数 u 或 v 的个数的下界, 其中 z 可表为 $d_2 z_2^k + \cdots + d_\ell z_\ell^k$; 并且, 如果变量 z_1 与 z 被限制在适当的范围内, 这些数全都互不相同。其范围当然依赖于

$d_1, \dots, d_\ell$ 。我们对 $U_\ell(X)$ 得到与前面相同的下界，只差一个依赖于 $d_1, \dots, d_\ell$ 的常数。

我们现在需要两个指数和 $R_1(\alpha), R_2(\alpha)$ ，分别对应于两个不同的数集 u_1, u_2 ；但由于

$$\int_0^1 |R_1(\alpha)R_2(\alpha)| d\alpha \leq \left\{ \int_0^1 |R_1(\alpha)|^2 d\alpha \int_0^1 |R_2(\alpha)|^2 d\alpha \right\}^{1/2},$$

我们得到与引理 9.4 的推论中相同的节省。

引理 9.5 的推论本质上不变，证明也如前完成。于是我们得到如下结果。

定理 10.1. 设 $c_1, \dots, c_s$ 是整数，没有一个等于 0，并且当 k 为偶数时它们不全同号。那么，如果

$$s \geq s_0 + 3(2k \log 3k + 1), \quad (10.5)$$

其中 s_0 取 (10.1) 中给出的值，则方程

$$c_1 x_1^k + \dots + c_s x_s^k = 0$$

有无穷多个整数解 $x_1, \dots, x_s$ ，没有一个等于 0。

-
1. 如果 p 不整除任何一个 c_j ，我们可以取 $\gamma_1(p) = \gamma$ 。 $\Leftarrow$