

# 一般齐次方程：Birch 定理

*General homogeneous equations: Birch's theorem*

现在我们转向一般的齐次方程，也就是不必属于此前所考虑的加性类型的方程。设  $f(x_1, \dots, x_n)$  是一个整系数的、次数为  $k$  的齐次多项式，我们称之为一个型 (form)。我们关心的是

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

在整数  $x_1, \dots, x_n$  (不全为 0) 中的可解性。由于齐次性，我们可以允许系数和变量取有理数而不取整数，这不改变问题的实质。一个显然的必要条件是：该方程必须在实数中可解，且解不全为 0。

当  $k = 2$ ，即  $f$  是一个二次型时，可以借助"配方法"把一般的型表示为加性型。由二次型的经典理论可知，对于可解性显然必要的同余条件——即对每个素数幂  $p^\nu$ ，条件  $f \equiv 0 \pmod{p^\nu}$  在并非所有变量都被  $p$  整除的情况下可解，再加上型  $f$  必须是不定的这一条件——也是充分的。这些同余条件只对一个有限素数集  $p$  才有意义，该集合依赖于系数；并且必须要求这些同余式有一个使  $x_1, \dots, x_n$  不全被  $p$  整除的解；这里  $\nu$  也由系数确定。当  $n \geq 5$  时这些同余条件总能满足，相应地我们便有 Meyer (1883) 的著名定理：五个或更多变量中的不定二次型总能非平凡地表示零。

对于  $k > 2$ ，一般的型比加性型一般得多。例如，若  $k = 3$ ，则一般型中有  $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$  个独立系数，而由于对  $n$  个

变量作的一个线性变换只有  $n^2$  个系数，显然几乎不可能作什么简化。

与一般型相关的一个重要问题是**退化性** (degeneration)。称  $n$  个变量中的一个型是**退化的**，如果存在一个从  $x_1, \dots, x_n$  到  $y_1, \dots, y_n$  的非奇异线性变换，使得变换后的型只涉及  $y_1, \dots, y_{n-1}$ ；也就是说，所有含  $y_n$  的项的系数都消失。退化性是一个绝对的性质，意思是：若一个型不会被某个特定域（例如有理数域）中系数的代换所退化，则在该域被扩张后它仍然不会退化。用我们的记号，必须有  $\partial f / \partial y_n = 0$  恒成立；而若  $C_j$  是  $y_n$  在  $x_j$  中的系数，这就等价于

$$C_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + C_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

恒成立。这个恒等式表示关于系数  $C_1, \dots, C_n$  的有限多个线性关系，而如果这些关系总能被满足，那么它们就能在原来的域中被满足。

然而，从当前问题——即表示零——的角度看，我们总可以假设  $f$  是非退化的；因为若  $f$  如上所述退化，那么对应于解  $y_1 = \dots = y_{n-1} = 0, y_n = 1$ ，就有一个  $x_1, \dots, x_n$  不全为 0 的解。

朝着求解一般齐次方程方向迈出第一步实质性进展的是 R. Brauer [9]。他证明：对于系数和变量在任意域中的方程，一个次数为  $k$  的齐次方程的可解性，可以从每一个次数  $\leq k$  的加性方程组的可解性推出。但为了在最终的方程组中得到合理多的变量数，原方程中变量的个数必须取得极其庞大。该定理本身在有理数域中不能成功应用，因为在那些加性方程之中会有一些偶次的，而若它们的系数符号全相同，这些方程肯定不可解。然而，Brauer 定理在  $p$  进数域中适用，并确立了一个函数  $n_1(k, h)$  的存在性，使得在  $n$  个变量中任意  $h$  个次数  $\leq k$ 、具有  $p$  进系数的齐次方程组，只要  $n \geq n_1(k, h)$ ，便在  $p$  进数中可解。

这一领域中最简单的问题是单个三次方程的问题。Lewis 教授 [56] 最先证明了存在一个绝对常数  $n_0$ ，使得任何  $n$  个变量中

带有理系数的三次方程，只要  $n \geq n_0$ ，便在有理数中可解。他通过用基于代数数论的论证去补充 Brauer 的结果，从而推出了这一点。

不久之后，Birch [5] 证明了一个更一般的定理，即：每个齐次方程组，只要其中各方程都是奇次的，并且  $n$  超过依赖于这些次数的某个函数，便可解。这个定理就是本章的主题。

在以其全部一般性证明 Birch 定理之前，我打算先就最简单的情形——单个三次方程——来说明方法。我们将会发现，为了从加性三次方程组的可解性推出一般三次方程的可解性，需要去求解某些线性方程组。后者的可解性由定理 8.1 保证，只要变量个数至少为  $k^2(2k-1)+1=46$ 。（实际上 8 个变量就够了，但这需要特殊的论证。）正如 Brauer 的方法那样——Birch 的方法是它的一个巧妙改进——在从一般型过渡到加性型的过程中，存在相当大的变量浪费。

设  $f(x_1, \dots, x_n)$  是一个三次型。我们说： $f$  表示  $g(y_1, \dots, y_m)$ （其中  $m \leq n$ ），如果存在  $n$  个关于  $y_1, \dots, y_m$  的线性型，其秩为  $m$ ，使得当用这些线性型替换  $x_1, \dots, x_n$  时，得到

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(y_1, \dots, y_m)$$

关于  $y_1, \dots, y_m$  恒成立。证明的基本思想是：证明  $f$  表示一个如下类型的型

$$a_0 t_0^3 + g_1(t_1, \dots, t_m). \quad (11.1)$$

只要  $n$  超过某个仅依赖于  $m$  的数。

写

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_i \sum_j \sum_k c_{ijk} x_i x_j x_k,$$

其中各求和从 1 到  $n$ ，且  $c_{ijk}$  是三个下标的对称函数。对三个点  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  定义三线性函数  $T(\mathbf{x} | \mathbf{y} | \mathbf{z})$ ：

$$T(\mathbf{x} | \mathbf{y} | \mathbf{z}) = \sum_i \sum_j \sum_k c_{ijk} x_i y_j z_k.$$

我们任取  $m$  个线性无关的点  $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(m)}$ ，它们具有整（或有理）坐标，并考虑关于一个未知点  $\mathbf{y}$  的方程

$$T(\mathbf{y} | \mathbf{y}^{(p)} | \mathbf{y}^{(q)}) = 0, \quad 1 \leq p \leq q \leq m$$

这是关于  $\mathbf{y}$  的  $n$  个坐标的  $\frac{1}{2}m(m+1)$  个线性方程。如果  $n > \frac{1}{2}m(m+1)$ , 则存在一个满足它们的、异于原点的点  $\mathbf{y}$ 。称这样的点为  $\mathbf{y}^{(0)}$ , 我们便有

$$T(\mathbf{y}^{(0)} | \mathbf{y}^{(p)} | \mathbf{y}^{(q)}) = 0$$

对  $1 \leq p \leq q \leq m$  成立。

如果点  $\mathbf{y}^{(0)}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(m)}$  线性相关, 那么 (因为后  $m$  个是线性无关的) 我们应当有

$$\mathbf{y}^{(0)} = c_1 \mathbf{y}^{(1)} + \dots + c_m \mathbf{y}^{(m)}$$

其中  $c_1, \dots, c_m$  是有理数。但那时

$$T(\mathbf{y}^{(0)} | \mathbf{y}^{(0)} | \mathbf{y}^{(0)}) = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m c_p c_q T(\mathbf{y}^{(0)} | \mathbf{y}^{(p)} | \mathbf{y}^{(q)}) = 0,$$

由此  $f(\mathbf{y}^{(0)}) = 0$ , 从而给出了所求的解。

于是我们可以假设这  $m+1$  个点线性无关。变换

$$x_j = t_0 y_j^{(0)} + t_1 y_j^{(1)} + \dots + t_m y_j^{(m)}, \quad (1 \leq j \leq n)$$

的秩为  $m+1$ , 并把  $f$  表示为  $t_0, t_1, \dots, t_m$  的一个型。在这个型中  $t_0 t_p t_q$  的系数是  $T(\mathbf{y}^{(0)} | \mathbf{y}^{(p)} | \mathbf{y}^{(q)})$ , 故当  $1 \leq p \leq q \leq m$  时它为 0。因此新的型具有下列形状

$$a_0 t_0^3 + t_0^2 (b_1 t_1 + \dots + b_m t_m) + g_1(t_1, \dots, t_m),$$

其中不含  $t_0$  的一次项。如果  $b_1, \dots, b_m$  全为 0, 我们便得到一个所求类型 (11.1) 的型。如果不然, 设  $b_m \neq 0$ , 我们令

$$t_m = -\frac{1}{b_m} (b_1 t_1 + \dots + b_{m-1} t_{m-1})$$

从而得到一个类型 (11.1) 的型，但其中  $m$  被  $m-1$  代替。于是，只要  $n > \frac{1}{2}m(m+1)$ ， $f$  就表示一个类型 (11.1) 的型。我们可以假设  $a_0 \neq 0$ ，因为若  $a_0 = 0$ ，则对应于  $t_0 = 1, t_1 = \cdots = t_m = 0$ ，存在一个  $x_1, \dots, x_n$  的解。

我们看到，只要取  $n$  足够大，就可以让  $m$  任意大。同样，我们也可以对新的型  $g(t_1, \dots, t_m)$  重复这一过程，该型可假设不表示零。由此可知，存在一个函数  $n_0(s)$ ，使得若  $n \geq n_0(s)$ ，则型  $f$  表示一个如下类型的型

$$b_1 u_1^3 + \cdots + b_s u_s^3.$$

由定理 8.1，只要  $s \geq s_0 (= 46, \text{比方说})$ ，相应的齐次方程便有非平凡解，从而当  $n \geq n_0(s_0)$  时原方程可解。

现在我们来证明 Birch 的一般定理：

**定理 11.1.** 设  $h, m$  是正整数，并设  $r_1, \dots, r_h$  是任意奇正整数。那么存在一个数

$$\Psi(r_1, \dots, r_h; m)$$

具有下列性质。设  $f_{r_1}(\mathbf{x}), \dots, f_{r_h}(\mathbf{x})$  是  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  中分别具有有理系数、次数为  $r_1, \dots, r_h$  的型。那么，只要  $n \geq \Psi(r_1, \dots, r_h; m)$ ，就存在一个  $m$  维有理向量空间，其中所有的点都满足

$$f_{r_1}(\mathbf{x}) = 0, \dots, f_{r_h}(\mathbf{x}) = 0.$$

注意我们断言的比"存在无穷多个解"更强；这是为了在归纳证明中方便。

**引理 11.1.** 存在一个数  $\Phi(r, m)$ ，对正整数  $m, r$ （其中  $r$  为奇数）有定义，使得若  $s \geq \Phi(r, m)$ ，则任何如下形式的方程

$$c_1 x_1^r + \cdots + c_s x_s^r = 0, \quad (c_j \text{ 有理})$$

都被某个  $m$  维有理线性空间中的所有点满足。

证. 此结果是由定理 8.1 或定理 10.1 简单推出的。由这两个定理中的任一个可知, 存在  $t = t(r)$  使得方程

$$c_1 y_1^r + \cdots + c_t y_t^r = 0$$

有一个非零整数解。注意, 由于  $r$  是奇数, 对系数的符号没有任何条件; 并且若其中任何一个为 0, 则有显然的解。类似地, 对于

$$c_{t+1} y_{t+1}^r + \cdots + c_{2t} y_{2t}^r = 0,$$

等等。于是, 若  $s \geq mt$ , 则由这些解构成的点

$$(u_1 y_1, \dots, u_1 y_t, u_2 y_{t+1}, \dots, u_2 y_{2t}, \dots, u_m y_{mt}, 0, \dots, 0)$$

对  $u_1, \dots, u_m$  的所有取值都满足该方程。当它们变动时, 这个点描出一个  $m$  维线性空间。因此结论成立, 并有  $\Phi(r, m) = mt$ . ■

证 (定理 11.1). 设  $R = \max r_j$ , 于是  $R$  是一个奇正整数。当  $\max r_j = 1$  时结果当然成立。我们对  $R$  (限于奇数值) 作归纳来证明它。我们将首先证明: 若结果对  $\max r_j \leq R - 2$  的方程组成立, 则它对单个次数为  $R$  的方程成立。一旦这一点得到证明, 把结果推广到次数  $\leq R$  的方程组就很容易, 从而完成归纳证明。

对一个次数为  $R$  的型  $f(x_1, \dots, x_n)$ , 我们定义  $R$  个点  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(R)}$  的一个多重线性函数:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum c_{i_1, \dots, i_R} x_{i_1} \cdots x_{i_R},$$

$$M(\mathbf{x}^{(1)} \mid \cdots \mid \mathbf{x}^{(R)}) = \sum c_{i_1, \dots, i_R} x_{i_1}^{(1)} \cdots x_{i_R}^{(R)}.$$

我们先选取  $h$  个线性无关的点  $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(h)}$ 。设  $\mathcal{Y}$  是由它们生成的  $h$  维线性空间。考虑方程

$$M(\underbrace{\mathbf{y} | \cdots | \mathbf{y}}_{\rho} | \mathbf{y}^{(p_1)} | \cdots | \mathbf{y}^{(p_{R-\rho})}) = 0,$$

其中  $\rho$  取从 1 到  $R - 2$  的所有奇数值, 而  $p_1, \dots, p_{R-\rho}$  取从 1 到  $h$  的所有值。这些方程的总数小于  $Rh^R$ 。它们每一个关于  $\mathbf{y}$  都是次数  $\leq R - 2$  的奇次方程。因此, 由归纳假设 (对  $m = 1$  的情形), 只要  $n \geq n_0(R, h)$ , 这些方程在  $\mathcal{Y}$  中就有了一个非零解。记这样的解为  $\mathbf{y}^{(0)}$ 。我们现在有

$$M(\underbrace{\mathbf{y}^{(0)} | \cdots | \mathbf{y}^{(0)}}_{\rho} | \underbrace{\mathbf{y} | \cdots | \mathbf{y}}_{R-\rho}) = 0$$

对  $\mathcal{Y}$  中所有  $\mathbf{y}$  以及所有奇数  $\rho \leq R - 2$  成立。

$\mathcal{Y}$  中一个任意点  $\mathbf{y}$  具有形式

$$u_1 \mathbf{y}^{(1)} + \cdots + u_h \mathbf{y}^{(h)}.$$

现在考虑方程

$$M(\underbrace{\mathbf{y}^{(0)} | \cdots | \mathbf{y}^{(0)}}_{R-\sigma} | \underbrace{\mathbf{y} | \cdots | \mathbf{y}}_{\sigma}) = 0,$$

其中  $\sigma$  取从 1 到  $R - 2$  的所有奇数值, 而  $\mathbf{y}$  是  $\mathcal{Y}$  中任意点。这些是关于  $u_1, \dots, u_h$  的次数  $\leq R - 2$  的奇次方程, 其个数  $< R$ 。再由归纳假设, 给定任何  $\ell$ , 只要  $h \geq h_0(R, \ell)$ , 这些方程将被  $\mathcal{Y}$  的某个  $\ell + 1$  维有理线性子空间中的所有点满足。把这个线性子空间

记为  $\mathcal{Y}_1$ 。我们可以不失一般性地假设  $\mathcal{Y}_1$  由  $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(\ell+1)}$  生成。我们便有

$$M(\underbrace{\mathbf{y}^{(0)} | \cdots | \mathbf{y}^{(0)}}_{\tau} | \underbrace{\mathbf{y} | \cdots | \mathbf{y}}_{R-\tau}) = 0$$

对所有  $\tau = 1, \dots, R - 1$  以及  $(\ell + 1)$  维空间  $\mathcal{Y}_1$  中所有  $\mathbf{y}$  成立。为保证这一点, 我们只需假设  $n \geq n_1(R, \ell)$ 。

如果  $\mathbf{y}^{(0)}$  在由  $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(\ell+1)}$  生成的子空间  $\mathcal{Y}_1$  中, 我们可以通过去掉其中一个生成点 (比方说  $\mathbf{y}^{(\ell+1)}$ ), 得到  $\mathcal{Y}_1$  的一个  $\ell$  维子空间  $\mathcal{Y}_2$ , 它不含  $\mathbf{y}^{(0)}$ 。现在点  $\mathbf{y}^{(0)}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(\ell)}$  是线性无关的。线性变换

$$x_j = t_0 y_j^{(0)} + t_1 y_j^{(1)} + \dots + t_\ell y_j^{(\ell)}, \quad (1 \leq j \leq n)$$

的秩为  $\ell + 1$ , 并给出  $f(\mathbf{x}) = g(t_0, \dots, t_\ell)$ , 比方说。在  $g$  中  $t_0^\tau t_{p_1} \dots t_{p_{R-\tau}}$  的系数 (其中各  $p_j$  从 1 到  $\ell$ ) 是

$$M(\underbrace{\mathbf{y}^{(0)} | \dots | \mathbf{y}^{(0)}}_{\tau} | \mathbf{y}^{(p_1)} | \dots | \mathbf{y}^{(p_{R-\tau})}) = 0,$$

而这对  $\tau = 1, \dots, R - 1$  以及任意选取的  $p_1, \dots, p_{R-\tau}$  都成立。因此

$$g(t_0, \dots, t_\ell) = a_0 t_0^R + g_1(t_1, \dots, t_\ell).$$

于是, 对任何  $\ell$ , 只要  $n \geq n_1(R, \ell)$ ,  $f$  就表示一个上述类型的型。重复这一论证可证明  $f$  表示一个如下类型的型

$$\underbrace{a_0 t_0^R + b_0 u_0^R + \dots}_s,$$

只要  $n \geq n_2(R, s)$ 。由引理 11.1, 把后一型令为 0 所得的齐次方程, 其解包含一个  $m$  维线性空间, 只要  $s \geq \Phi(R, m)$ 。因此原方程的解包含一个  $m$  维线性空间, 只要  $n \geq n_2(R, \Phi(R, m))$ 。这就证明了单个次数为  $R$  的方程所要的结果。

现在设有  $h$  个方程  $f_{r_1} = 0, \dots, f_{r_h} = 0$ , 其中每个  $r_j \leq R$ 。我们对  $h$  作归纳来证明结果,  $h = 1$  的情形即我们刚刚证明的。给定  $m_1$ , 由定理对  $h = 1$  的情形, 存在一个  $m_1$  维有理线性空间, 在其上  $f_{r_h} = 0$ , 只要  $n \geq \Psi(r_h; m_1)$ 。我们可以把这个线性空间的点表示为

$$v_1 \mathbf{x}^{(1)} + \dots + v_{m_1} \mathbf{x}^{(m_1)}.$$

对这些点，型  $f_{r_1}, \dots, f_{r_{h-1}}$  成为  $v_1, \dots, v_{m_1}$  中的型。由  $h-1$  的情形，存在一个  $m$  维线性空间，在其上它们全部消失，只要  $m_1 \geq \Psi(r_1, \dots, r_{h-1}; m)$ 。因此所有这些型在该空间上消失，于是定理的  $h$  情形成立，并有

$$\Psi(r_1, \dots, r_h; m) = \Psi(r_h; \Psi(r_1, \dots, r_{h-1}; m)).$$

这就完成了证明。 ■

**推论.** 即使型的系数与  $x_1, \dots, x_n$  取值于一个代数数域  $K$  中，定理 11.1 仍然成立，但此时  $\Psi$  依赖于  $K$ 。

当我们把每个系数与每个变量用  $K$  的一组基  $\{1, \theta, \dots, \theta^{\nu-1}\}$ （其中  $\nu$  是  $K$  的次数， $\theta$  是一个生成元）线性地表示出来时，每个方程都等价于  $\nu$  个具有相同次数、带有理系数与变量的方程。

我们接下来的目标将是证明一个更精确的结果，它关于使单个齐次三次方程可解所需的变量个数。在工作过程中，我们将需要数的几何中的一些结果，因此我们将以对这一主题某些方面的叙述作为开始。