

三次型：双线性方程

Cubic forms: bilinear equations

我们现在研究引理 13.4 的备择情形 A，即：对于某个任意大的 R ，存在多于 $R^{n+\varepsilon}$ 对整点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ，满足 $0 < |\mathbf{x}| < R$ 、 $0 < |\mathbf{y}| < R$ 以及

$$B_j(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0, \quad (1 \leq j \leq n). \quad (14.1)$$

按照刚才所作的注记，我们已经排除了 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 与 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 。在本章中（本章是自足的），我们将证明：这蕴涵存在一个整点 $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ ，使得 $C(\mathbf{z}) = 0$ 。事实上，稍弱的假设即已足够，即：存在多于 AR^n 对 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ，其中 A 大于 n 的某个函数。但使用 ε 会使叙述更简洁。

对于任意一个特定的 $\mathbf{x}$ ，方程 (14.1) 是关于 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ 的 n 个线性方程，其行列式为

$$H(\mathbf{x}) = \det \left(\sum_{i=1}^n c_{ijk} x_i \right), \quad (1 \leq j, k \leq n). \quad (14.2)$$

这是三次型 $C(\mathbf{x})$ 的 Hessian。它是关于 $\mathbf{x}$ 的一个 n 次型；或者更确切地说，应称为表观次数为 n 的型，因为它可能恒等于零。我们必须首先证明：若 $C(\mathbf{x})$ 不表示零，则它不可能恒为零。

引理 14.1. 若对所有非零整点 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 都有 $C(\mathbf{x}) \neq 0$ ，则 $H(\mathbf{x})$ 不恒等于零。

证. 假设 $H(\mathbf{x}) \equiv 0$ 恒成立。设 $n - r$ (其中 $r \geq 1$) 为 $H(\mathbf{x})$ 的恒等秩; 也就是说, 假设 (14.2) 中矩阵的所有 $n - r + 1$ 阶子行列式都关于 $\mathbf{x}$ 恒等于零, 但存在某个 $n - r$ 阶的子行列式不恒为零。为叙述方便, 设最后这个行列式 (记作 Δ) 位于左上角。那么方程 (14.1) 中的前 $n - r$ 个就蕴涵了其余所有的方程, 因为后面诸行与前 $n - r$ 行线性相关。设 Δ_j 表示将 Δ 的第 j 列替换为第 $(n - r + 1)$ 列后所得的行列式。那么方程 $B_j(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0$ 的一个特解由下式给出:

$$y_1 = \Delta_1, \dots, y_{n-r} = \Delta_{n-r}, y_{n-r+1} = -\Delta, y_{n-r+2} = \dots = 0.$$

(这由 Cramer 法则得出: 我们求解前 $n - r$ 个方程, 令 $y_{n-r+1} = 1, y_{n-r+2} = 0, \dots$, 再整体乘以 $-\Delta$ 。)

在此解中, $y_1, \dots, y_n$ 是 $x_1, \dots, x_n$ 的、具有整系数的型, 它们并非全部恒等于零, 因为 Δ 不恒为零。我们有

$$B_j(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \sum_{i,k} c_{ijk} x_i y_k = 0$$

关于 $x_1, \dots, x_n$ 恒成立。现在我们把 $x_1, \dots, x_n$ 视为连续变量, 并对任意 x_ν 微分此恒等式, 得到

$$\sum_k c_{\nu j k} y_k + \sum_{i,k} c_{ijk} x_i \frac{\partial y_k}{\partial x_\nu} = 0$$

对所有 j 与 ν 成立。乘以 y_j 并对 j 求和, 并注意到

$$\sum_i \sum_j c_{ijk} x_i y_j = 0$$

对所有 k 成立。我们得到

$$\sum_{j,k} c_{\nu j k} y_j y_k = 0$$

对所有 ν 成立。这特别地蕴涵 $C(\mathbf{y}) = 0$ 。若我们现在取 $\mathbf{x}$ 为任意一个使 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ 的整点（这是可能的，因为 $\mathbf{y}$ 不恒为 $\mathbf{0}$ ），便与假设矛盾。这就证明了该引理。 ■

上一引理表明：那些使得线性方程 $B_j(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0$ 关于 $\mathbf{y}$ 有非零解的点 $\mathbf{x}$ ，满足非恒等的方程 $H(\mathbf{x}) = 0$ 。于是满足 $0 < |\mathbf{x}| < R$ 的这种整点的个数为 $\ll R^{n-1}$ 。我们接下来通过证明如下结论来推广此结果：对于 $r = 1, \dots, n-1$ ，满足 $0 < |\mathbf{x}| < R$ 且使诸方程关于 $\mathbf{y}$ 有 r 个线性无关解的整点 $\mathbf{x}$ 的个数为 $\ll R^{n-r}$ 。已证明的结果即为 $r = 1$ 的情形。

先处理一个初等代数几何的问题是方便的。

引理 14.2. 设

$$f_1(\mathbf{x}), \dots, f_N(\mathbf{x})$$

是关于 $x_1, \dots, x_n$ 的、具有整系数的型，并假设 N 以及 $f_1, \dots, f_N$ 的（公共）次数关于 n 有界。假设对于某个任意大的 R ，存在一个整点集 $\mathcal{X}$ ，其中的 $\mathbf{x}$ 满足

$$0 < |\mathbf{x}| < R, \quad f_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, f_N(\mathbf{x}) = 0,$$

并假设 $\mathcal{X}$ 中有多于 $R^{n-r+\varepsilon}$ 个点。那么，对于 $\mathcal{X}$ 中的某个点 $\mathbf{x}$ ，存在数 $T_{i\rho}, D_{\rho\nu}$ ，使得在该点处

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_\nu} = \sum_{\rho=1}^{r-1} T_{i\rho} D_{\rho\nu},$$

对 $i = 1, \dots, N$ 与 $\nu = 1, \dots, n$ 成立。

注. 关于 $\partial f_i / \partial x_\nu$ 的这些方程，等价于断言：矩阵 $\partial f_i / \partial x_\nu$ （

$i = 1, \dots, N, \nu = 1, \dots, n$) 的秩 $\leq r - 1$ 。这由初等矩阵理论得出。

证. 方程 $f_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, f_N(\mathbf{x}) = 0$ 在 n 维空间 (或 $(n - 1)$ 维射影空间) 中定义了一个代数簇。这样的簇可表示为若干绝对不可约簇之并, 而在当前假设下, 这些不可约簇的个数关于 n 有界。因此存在这些绝对不可约簇之一, 记作 $\mathcal{V}$, 它包含 $\mathcal{X}$ 中多于 $R^{n-r+\frac{1}{2}\varepsilon}$ 个点。

把绝对不可约簇 $\mathcal{V}$ 视为复空间中的一个点集, 与它相联系的是其维数 s 。我们只需要 s 的下述性质: 不可约簇 $\mathcal{V}$ 可分解为有限多个部分, 使得在每一部分上, $x_1, \dots, x_n$ 中有 s 个是独立变量, 而另外 $n - s$ 个是它们的单值可微函数。

由此可知, $\mathcal{V}$ 包含 $\ll R^s$ 个满足 $|\mathbf{x}| < R$ 的整点 $\mathbf{x}$, 因为这 s 个坐标中的每一个都有 $\ll R$ 种可能。与前面关于 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{V}$ 上点数的陈述相比较, 可知

$$s \geq n - r + 1.$$

现在考虑 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{V}$ 上任一点的邻域。我们可设这里 $x_{s+1}, \dots, x_n$ 是 $x_1, \dots, x_s$ 的单值可微函数。设 $f(x_1, \dots, x_n)$ 为在 $\mathcal{V}$ 上处处为零的任意可微函数。那么, 对恒等式 $f = 0$ 关于 x_ν ($\nu = 1, \dots, s$) 微分, 得到

$$f^{(\nu)} + f^{(s+1)} \frac{\partial x_{s+1}}{\partial x_\nu} + \dots + f^{(n)} \frac{\partial x_n}{\partial x_\nu} = 0,$$

其中当 $x_1, \dots, x_n$ 为独立变量时 $f^{(j)} = \partial f / \partial x_j$ 。于是对 $\nu = 1, \dots, s$ 我们有

$$\begin{aligned} f^{(\nu)} &= \sum_{\rho=1}^{n-s} f^{(s+\rho)} \left(-\frac{\partial x_{s+\rho}}{\partial x_\nu} \right) \\ &= \sum_{\rho=1}^{n-s} f^{(s+\rho)} D_{\rho,\nu}, \end{aligned}$$

记作如此。若对 $\nu > s$ 定义 $D_{\rho,\nu}$ 为

$$D_{\rho,\nu} = \begin{cases} 1 & \text{若 } s + \rho = \nu, \\ 0 & \text{否则,} \end{cases}$$

则同样的关系对 $\nu = s + 1, \dots, n$ 也成立。因此

$$f^{(\nu)}(\mathbf{x}) = \sum_{\rho=1}^{n-s} T_{\rho}(f) D_{\rho,\nu}$$

对 $\nu = 1, \dots, n$ 成立，其中 $T_{\rho}(f) = f^{(s+\rho)}$ 。注意到数 $D_{\rho,\nu}$ 与 f 无关，而数 $T_{\rho}(f)$ 与 ν 无关。这就证明了命题中的结论，因为 $n - s \leq r - 1$ ，且这些关系在 $\mathcal{V}$ 上任一点成立，特别在 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{V}$ 上的任一点成立。 ■

引理 14.3. 设对所有非零整点 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 都有 $C(\mathbf{x}) \neq 0$ 。那么，满足 $0 < |\mathbf{x}| < R$ 且使双线性方程 $B_j(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0$ 关于 $\mathbf{y}$ 恰有 r 个线性无关解的整点 $\mathbf{x}$ 的个数小于 $R^{n-r+\varepsilon}$ 。

证. 所讨论的点是那些使矩阵 $(\sum_i c_{ijk} x_i)$ 的秩恰为 r 的点。只需考虑整点集 $\mathcal{X}$ ：其中某个特定的 $n - r$ 阶子行列式 $\neq 0$ ，而所有 $n - r + 1$ 阶子行列式均为 0，并证明 $\mathcal{X}$ 中点的个数小于 $R^{n-r+\varepsilon}$ 。假设 $\mathcal{X}$ 中点的个数 $\geq R^{n-r+\varepsilon}$ 。那么我们就处于引理 14.2 的情形之下，其中 $f_1(\mathbf{x}), \dots, f_N(\mathbf{x})$ 是全部 $n - r + 1$ 阶子行列式。

对于 $\mathcal{X}$ 中的任意点 $\mathbf{x}$ ，我们可以构造双线性方程的 r 个线性无关解 $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(r)}$ ，正如引理 14.1 的证明中那样，把这些点的坐标取为某些 $n - r$ 阶的子行列式。（在那个证明中，我们只需要一个解，是取 $y_{n-r+1} = -\Delta$ ， $y_{n-r+2} = \dots = 0$ 得到的；但推广到 r 个解是显然的。）

现在考虑当 $\mathbf{x}$ 为任意点（实的或复的）、 $\mathbf{y}^{(p)}$ 如上所述时， $B_j(\mathbf{x} | \mathbf{y}^{(p)})$ 的值。此值将是开头所提矩阵的某个 $n - r + 1$ 阶子行列式。（有时它会是一个有两行相同的 $n - r + 1$ 阶子行列式，但这无关紧要。）于是对任意点 $\mathbf{x}$ ，我们有恒等式

$$\sum_{i,k} c_{ijk} x_i y_k^{(p)} = \Delta_{j,p}(\mathbf{x}),$$

其中 $\Delta_{j,p}(\mathbf{x})$ 是某个 $n - r + 1$ 阶子行列式。当然，若 $\mathbf{x}$ 在 $\mathcal{X}$ 中，则所有 $\Delta_{j,p}$ 都为零。

在上述恒等式中， $x_1, \dots, x_n$ 是独立变量。关于 x_ν 微分给出

$$\sum_k c_{\nu jk} y_k^{(p)} + \sum_{i,k} c_{ijk} x_i \frac{\partial y_k^{(p)}}{\partial x_\nu} = \Delta_{j,p}^{(\nu)}(\mathbf{x}),$$

其中右端的上标 (ν) 表示偏导数。乘以 $y_j^{(q)}$ ($1 \leq q \leq r$) 并对 j 求和。我们得到

$$\sum_{j,k} c_{\nu jk} y_k^{(p)} y_j^{(q)} + \sum_k \Delta_{k,q} \frac{\partial y_k^{(p)}}{\partial x_\nu} = \sum_j y_j^{(q)} \Delta_{j,p}^{(\nu)}(\mathbf{x}).$$

现在考虑由 $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(r)}$ 张成的 r 维线性空间中的任意一点 $\mathbf{Y}$ ，记作

$$\mathbf{Y} = \sum_{p=1}^r K_p \mathbf{y}^{(p)}.$$

对于此点，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} c_{\nu jk} Y_j Y_k + \sum_{p=1}^r \sum_{q=1}^r K_p K_q \sum_k \Delta_{k,q} \frac{\partial y_k^{(p)}}{\partial x_\nu} &= \sum_{p=1}^r \sum_{q=1}^r K_p K_q \sum_j y_j^{(q)} \Delta_{j,p}^{(\nu)} \\ &= \sum_{p=1}^r \sum_j A_{j,p} \Delta_{j,p}^{(\nu)}, \end{aligned}$$

记作如此。这对 $\nu = 1, \dots, n$ 成立。取 $\mathbf{x}$ 为引理 14.2 中所找到的那些点之一。对于此点（从现在起它被固定），我们有 $\Delta_{k,q} = 0$ 对所有 k 与 q 成立，且

$$\Delta_{j,p}^{(\nu)} = \sum_{\rho=1}^{r-1} T_{j,p,\rho} D_{\rho,\nu}.$$

因此

$$\sum_{j,k} c_{\nu jk} Y_j Y_k = \sum_{p=1}^r \sum_j A_{j,p} \sum_{\rho=1}^{r-1} T_{j,p,\rho} D_{\rho,\nu}.$$

最后，乘以 $Y_\nu = \sum_{\sigma=1}^r K_\sigma y_\nu^{(\sigma)}$ 并对 ν 求和。我们得到

$$C(\mathbf{Y}) = \sum_{p=1}^r \sum_j A_{j,p} \sum_{\sigma=1}^r \sum_{\rho=1}^{r-1} K_\sigma y_\nu^{(\sigma)} T_{j,p,\rho} D_{\rho,\nu}.$$

现在选取数 $K_1, \dots, K_r$ 使其满足

$$\sum_{\sigma=1}^r K_\sigma \sum_{\nu} y_\nu^{(\sigma)} D_{\rho,\nu} = 0, \quad (1 \leq \rho \leq r-1).$$

这是关于 r 个未知数的 $r-1$ 个线性方程，因而有一个 $K_1, \dots, K_r$ 不全为零的解。又因为系数可设为有理的，我们可以取 $K_1, \dots, K_r$ 为整数。于是 $\mathbf{Y}$ 是一个非 $\mathbf{0}$ 的整点，因为 $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(r)}$ 线性无关（这是由于点 $\mathbf{x}$ 在 $\mathcal{X}$ 中）。我们得到 $C(\mathbf{Y}) = 0$ ，与假设矛盾，这就证明了结论。 ■

注. 须注意，在上述证明中， $K_1, \dots, K_r$ 的选取并未涉及数 $A_{j,p}$ 。否则推理将是谬误的，因为这些数本身依赖于 $K_1, \dots, K_r$ 。

引理 14.4. 引理 13.4 的备择情形 A 蕴涵 $C(\mathbf{x})$ 表示 0。

证. 若 $C(\mathbf{x})$ 不表示零，则引理 14.1 与引理 14.3 蕴涵：存在 $\ll R^{n-r+\varepsilon}$ 个点 $\mathbf{x}$ ，使得双线性方程关于 $\mathbf{y}$ 恰有 r 个线性无关解。因此存在 $\ll R^{n+\varepsilon}$ 对满足 $0 < |\mathbf{x}| < R$ 、 $0 < |\mathbf{y}| < R$ 的整点对 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 满足这些双线性方程。但这与备择

情形 A 矛盾，因为我们可以把现在的 ε 取为（比方说）备择情形 A 中 ε 的一半。（事实上，正如前面所注记的，本证明表明 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 对的个数为 $\ll R^n$ 。） ■