

三次型：劣弧与优弧

Cubic forms: minor arcs and major arcs

从现在起，我们可以假设引理 13.4 的备选 B 成立。于是，对任意 α ，要么

$$|S(\alpha)| < P^{n-\frac{1}{4}n\theta+\varepsilon} \quad (15.1)$$

要么 α 落入我们将称之为 $\xi(\theta)$ 的实数集合，这些实数具有满足下述条件的有理逼近 a/q ：

$$(a, q) = 1, \quad 1 \leq q \ll P^{2\theta}, \quad |q\alpha - a| \ll P^{-3+2\theta}. \quad (15.2)$$

我们将会发现，只要 $n \geq 17$ ，这个结果就足以令人满意地估计在 $\xi(\theta_0)$ 之外的所有 α 对积分 $\mathcal{N}(P)$ 所作的贡献，其中 θ_0 可以取为任意固定的正数，与 P 无关。显然把 θ_0 取小是有利的。

有鉴于此，我们定义**优弧** $\mathfrak{M}$ 为集合 $\xi(\theta_0)$ ，也就是将 (15.2) 中的 θ 换成 θ_0 所得的区间集；并定义**劣弧** $\mathfrak{m}$ 为这个集合关于区间 $0 < \alpha < 1$ 的补集。

引理 15.1. 只要 $n \geq 17$ ，我们就有

$$\int_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)| d\alpha \ll P^{n-3-\delta} \quad (\delta > 0).$$

证. 我们选取一组数

$$\theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_h = \frac{3}{4} + \delta.$$

每个实数 α 都落在集合 $\xi(\theta_h)$ 中，因为我们总能找到 a, q 使得

$$q \leq P^{3/2}, \quad |q\alpha - a| < P^{-3/2},$$

而这就意味着 α 落在 $\xi(\frac{3}{4} + \delta)$ 中。劣弧是 $\xi(\theta_0)$ 的补集，我们可以把它看作如下并集

$$\xi(\theta_h) - \xi(\theta_{h-1}), \quad \xi(\theta_{h-1}) - \xi(\theta_{h-2}), \quad \dots, \quad \xi(\theta_1) - \xi(\theta_0),$$

其中差是在集合论意义下理解的。

在集合 $\xi(\theta_g) - \xi(\theta_{g-1})$ 中，不等式 (15.1) 在 $\theta = \theta_{g-1}$ 时成立，于是

$$|S(\alpha)| \ll P^{n - \frac{1}{4}n\theta_{g-1} + \varepsilon}.$$

这个集合的测度不超过 $\xi(\theta_g)$ 的测度，后者满足

$$\ll \sum_{q \leq P^{2\theta_g}} \sum_{a=1}^q q^{-1} P^{-3+2\theta_g} \ll P^{-3+4\theta_g}.$$

因此这个集合对 $|S(\alpha)|$ 的积分所作的贡献为

$$\ll P^{n - \frac{1}{4}n\theta_{g-1} - 3 + 4\theta_g + \varepsilon}.$$

当 $n \geq 17$ 时，只要

$$\theta_{g-1} > \frac{16}{17}\theta_g + \frac{4}{17}(\delta + \varepsilon),$$

这就是 $\ll P^{n-3-\delta}$ 。我们可以把 $\theta_1, \dots, \theta_h$ 选得彼此足够接近，使上式成立。于是得到所要的结论。 ■

现在我们要处理优弧 $\mathfrak{M}_{a,q}$ ，它由 (15.2) 中取 $\theta = \theta_0$ 给出。我们令 $2\theta_0 = \Delta$ ，于是 (15.2) 变为

$$(a, q) = 1, \quad 1 \leq q \ll P^\Delta, \quad |q\alpha - a| \leq P^{-3+\Delta}.$$

把优弧略微放大将会方便；我们用区间 $\mathfrak{M}'_{a,q}$ 来代替它们，其中把最后一个不等式左边除以 q ，但右边不除：

$$(a, q) = 1, \quad 1 \leq q \ll P^\Delta, \quad |\alpha - a/q| \leq P^{-3+\Delta}. \quad (15.3)$$

这样做显然是允许的，因为这个附加集合所作的贡献是劣弧对 $\int |S(\alpha)| d\alpha$ 所作贡献的一部分，因而已被引理 15.1 的估计所覆盖。

这一放大的目的，正如第 4 章中所做的，是使区间的长度与 q 无关。只有当 q 被 P 的某个小幂所界定时（如此处所示），这才有可能；但只要它有可能，就会带来一点简化，即奇异级数与奇异积分的分离会在证明中较早的地方发生，而非否则的较晚之处。

我们定义

$$S_{a,q} = \sum_{\mathbf{z} \pmod{q}} e\left(\frac{a}{q}C(\mathbf{z})\right),$$

$$I(\beta) = \int_{P\mathfrak{B}} e(\beta C(\xi)) d\xi,$$

其中 $P\mathfrak{B}$ 是第 13 章中早先定义 $S(\alpha)$ 时所用的盒子。

引理 15.2. 对于区间 $\mathfrak{M}'_{a,q}$ 中的 α ，令 $\alpha = \beta + a/q$ ，我们有

$$S(\alpha) = q^{-n} S_{a,q} I(\beta) + O(P^{n-1+2\Delta}).$$

证. 引理 4.2 证明中所用的粗略论证在这里也足够，理由是此处（与那里一样） q 与 P 相比非常小。不过我们现在必须在 n 维而非一维中工作，这意味着要用积分代替求和。我们必须对大盒子中整点的个数与其体积之间的差异作出估计。

令 $\mathbf{x} = q\mathbf{y} + \mathbf{z}$ ，其中 $0 \leq z_j < q$ ，我们需要估计

$$\sum_{\mathbf{y}} e(\beta C(q\mathbf{y} + \mathbf{z})) \quad \text{与} \quad \int e(\beta C(q\boldsymbol{\eta} + \mathbf{z})) d\boldsymbol{\eta}$$

之间的差，其中对 $\mathbf{y}$ 求和的条件使得 $0 < qy_j + z_j < P$ ，对 $\boldsymbol{\eta}$ 也类似。于是 $\mathbf{y}$ 的盒子的边长为 $\ll P/q$ ，而上面提到的允许误差为 $(P/q)^{n-1}$ 。我们还须考虑被积函数在边长为 1 的范围内的变化。我们有

$$\left| \frac{\partial}{\partial \eta_j} \beta C(q\boldsymbol{\eta} + \mathbf{z}) \right| \ll |\beta| q P^2 \ll q P^{-1+\Delta}.$$

由此得到的误差是把它乘以积分区域的体积，后者为 $\ll (P/q)^n$ 。

由此可知，求和与积分之间的差为

$$\ll (P/q)^{n-1} + q P^{-1+\Delta} P^n q^{-n} \ll P^{n-1+\Delta} q^{1-n}.$$

(若 n 等于 1，这将是 P^Δ ，对应于引理 4.2 证明中的 P^δ 。) 对 $\mathbf{z}$ 的 q^n 个值求和，最终误差项为

$$\ll P^{n-1+\Delta} q \ll P^{n-1+2\Delta}.$$

引理 15.3. 对于不表示零的固定三次型 $C(\mathbf{x})$ ，我们有

$$|S_{a,q}| \ll q^{\frac{7}{8}n+\varepsilon}.$$

证. 我们可以把引理 13.4 的备选 B 应用于和式 $S(\alpha)$ ，其中取 $\alpha = a/q$ ， $P = q$ ，且盒子 $\mathfrak{B}$ 取为盒子 $0 \leq x_j < 1$ ，使得求和盒子变为 $0 \leq x_j < q$ 。取 $\theta = \frac{1}{2} - \varepsilon$ 。则要么

$$|S(\alpha)| < q^{n-\frac{1}{4}n\theta+\varepsilon} \ll q^{\frac{7}{8}n+\varepsilon},$$

要么 α 有满足下述条件的有理逼近 a'/q' ：

$$1 \leq q' \ll P^{1-2\varepsilon}, \quad |q'\alpha - a'| < P^{-2}.$$

但当 $\alpha = a/q$ 时后者是不可能的，因为它将给出 $q' < q$ 以及

$$|q'(a/q) - a'| < q^{-2},$$

而显然 $|q'(a/q) - a'| \geq 1/q$ 。因此对 $S(\alpha) = S_{a,q}$ 的估计成立。 ■

引理 15.4. 若 $\mathfrak{M}'$ 表示放大后优弧 $\mathfrak{M}'_{a,q}$ 的全体，则对某个 $\delta > 0$,

$$\int_{\mathfrak{M}'} S(\alpha) d\alpha = P^{n-3} \mathfrak{S}(P^\Delta) J(P^\Delta) + O(P^{n-3-\delta}),$$

其中

$$\mathfrak{S}(P^\Delta) = \sum_{q \ll P^\Delta} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q q^{-n} S_{a,q},$$

$$J(P^\Delta) = \int_{|\gamma| < P^\Delta} \left(\int_{\mathfrak{B}} e(\gamma C(\xi)) d\xi \right) d\gamma.$$

证. 引理 15.2 中的误差项，在 $|\beta| < P^{-3+\Delta}$ 上积分、对 a 求和、再对 q 求和后，给出最终误差项

$$\ll \sum_{q \ll P^\Delta} \sum_a P^{-3+\Delta} P^{n-1+2\Delta} \ll P^{n-4+5\Delta}.$$

只要 Δ 足够小，这就是 $\ll P^{n-3-\delta}$ 。

引理 15.2 中的主项给出

$$\sum_{q \ll P^\Delta} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q q^{-n} S_{a,q} \int_{|\beta| < P^{-3+\Delta}} I(\beta) d\beta.$$

求和与积分是相互独立的，求和部分给出 $\mathfrak{S}(P^\Delta)$ 。积分变为

$$P^{-3} \int_{|\gamma| < P^\Delta} I(P^{-3}\gamma) d\gamma,$$

而这等于 $P^{n-3}J(P^\Delta)$, 因为

$$\begin{aligned} I(P^{-3}\gamma) &= \int_{P\mathfrak{B}} e(P^{-3}\gamma C(\xi)) d\xi \\ &= P^n \int_{\mathfrak{B}} e(\gamma C(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

于是得到所要的结论。 ■