

第16章 三次型：奇异积分

Cubic forms: the singular integral

奇异积分就是出现在引理 15.4 中的那个积分，即

$$J(\mu) = \int_{-\mu}^{\mu} \left(\int_{\mathcal{B}} e(\gamma C(\xi)) d\xi \right) d\gamma, \quad (16.1)$$

这里我们把 P^Δ 记作 μ 。它依赖于在第 13 章定义指数和 $S(\alpha)$ 时所用的盒子 $\mathcal{B}$ ，本章的目标是证明：我们能够把 $\mathcal{B}$ 选取得使得

$$J(\mu) \rightarrow J_0 > 0, \quad \text{当 } \mu \rightarrow \infty. \quad (16.2)$$

我们将选取盒子 $\mathcal{B}$ ，使它以方程

$$C(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*) = 0 \quad (16.3)$$

的一个实解 $\xi_1^*, \dots, \xi_n^*$ 为中心。这样做是自然的，因为我们的目标是得到 $\mathcal{N}(P)$ 的一个渐近公式，它将表明 $\mathcal{N}(P) \rightarrow \infty$ ；这里假定备择情形 A 已被排除。如果 $C(\xi) = 0$ 在 $\mathcal{B}$ 中没有实解，那么在 $P\mathcal{B}$ 中也不会有，从而 $\mathcal{N}(P)$ 就会是 0。

事实上我们将取 $\xi_1^*, \dots, \xi_n^*$ 比 $C(\xi) = 0$ 的任意实解要求得更多一些；我们将把它取为一个非奇异解¹，其中 $\xi_1^*, \dots, \xi_n^*$ 没有一个为 0。这是一个方便的选择，以确保 (16.2) 成立，而且这或许还是必要的。

这样一个解的存在性容易证明。对任意实数 $\xi_2, \dots, \xi_n$ ，我们都能找到一个实数 ξ_1 满足 $C(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$ ，而且只需保证

$$\xi_1 \neq 0 \quad \text{且} \quad \partial C / \partial \xi_1 \neq 0.$$

对任意 $\xi_2, \dots, \xi_n$, 关于 ξ_1 的方程形如

$$c_{111}\xi_1^3 + F\xi_1^2 + G\xi_1 + H = 0,$$

这里 F, G, H 分别是 $\xi_2, \dots, \xi_n$ 的 1, 2, 3 次型。只要 $H \neq 0$ (注意 H 不可能恒等于零), 我们就有 $\xi_1 \neq 0$ 。设 $D(\xi_2, \dots, \xi_n)$ 为关于 ξ_1 的三次方程的判别式。那么只要 $D \neq 0$, 我们就有 $\partial C / \partial \xi_1 \neq 0$ 。我们可以假定 D 不恒等于零, 因为否则关于 ξ_1 的二重根将由 $\xi_2, \dots, \xi_n$ 有理地确定, 于是我们便得到 $C(\xi) = 0$ 的有理解。

这样我们便能找到 (16.3) 所期望的非奇异实解 $\xi_1^*, \dots, \xi_n^*$ 。我们取 $\mathcal{B}$ 为该点周围的一个小立方体, 例如

$$|\xi_j - \xi_j^*| < \rho, \quad (1 \leq j \leq n). \quad (16.4)$$

引理 16.1. 若 ρ 取得充分小, 则 (16.2) 成立。

证. 我们有

$$\begin{aligned} J(\mu) &= \int_{-\mu}^{\mu} \left(\int_{\mathcal{B}} e(\gamma C(\xi)) d\xi \right) d\gamma \\ &= \int_{\mathcal{B}} \frac{\sin 2\pi\mu C(\xi)}{\pi C(\xi)} d\xi \\ &= \int_{-\rho}^{\rho} \cdots \int_{-\rho}^{\rho} \frac{\sin 2\pi\mu C(\xi^* + \eta)}{\pi C(\xi^* + \eta)} d\eta, \end{aligned} \quad (16.5)$$

其中 $\xi = \xi^* + \eta$ 。

对任意 η , 我们有

$$C(\xi^* + \eta) = c_1\eta_1 + \cdots + c_n\eta_n + P_2(\eta) + P_3(\eta), \quad (16.6)$$

这里 $P_2(\eta), P_3(\eta)$ 是关于 η 的 2 次和 3 次型。我们有

$$c_1 = \frac{\partial C}{\partial \xi_1}(\xi_1^*, \dots, \xi_n^*) \neq 0.$$

不失一般性，我们可以假定 $c_1 = 1$ 。

对于 $|\boldsymbol{\eta}| < \rho$ ，我们有

$$|C(\boldsymbol{\xi}^* + \boldsymbol{\eta})| < \sigma,$$

其中 $\sigma = \sigma(\rho)$ 随 ρ 而变小。令 $C(\boldsymbol{\xi}^* + \boldsymbol{\eta}) = \zeta$ 。那么，若 ρ 充分小，我们可以反演关系 (16.6)，把 η_1 用 $\eta_2, \dots, \eta_n$ 借助幂级数表示出来。这将是如下形式之一：

$$\eta_1 = \zeta - c_2\eta_2 - \dots - c_n\eta_n + P(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n),$$

其中 P 是一个至少从 2 次项开始的多重幂级数。于是

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \zeta} = 1 + P_1(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n),$$

取 ρ 充分小，我们便能保证在

$$|\eta_2| < \rho, \dots, |\eta_n| < \rho, |\zeta| < \sigma$$

上有 $|P_1| < 1/2$ 。

在 (16.5) 中作从 η_1 到 ζ 的变量替换，我们得到

$$J(\mu) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{\sin 2\pi\mu\zeta}{\pi\zeta} V(\zeta) d\zeta, \quad (16.7)$$

其中

$$V(\zeta) = \int_{\mathcal{B}'} \{1 + P_1(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n)\} d\eta_2 \cdots d\eta_n,$$

这里 $\mathcal{B}'$ 表示 $(n-1)$ 维立方体

$$|\eta_2| < \rho, \dots, |\eta_n| < \rho$$

中满足 $|\eta_1| < \rho$ 的那一部分，也就是满足

$$|\zeta - c_2\eta_2 - \dots - c_n\eta_n + P(\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n)| < \rho$$

的部分。

显然，对于充分小的 $|\zeta|$ ， $V(\zeta)$ 是 ζ 的连续函数。同样容易看出， $V(\zeta)$ 是有界变差函数，因为它在 ζ 的每个值处都有左、右导数，且它们是有界的。因此，把 Fourier 积分定理应用于 (16.7)，我们有

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} V(\mu) = V(0).$$

现在 $V(0)$ 是一个正数，因为立方体 $\mathcal{B}'$ 包含任意充分小的以原点为中心的 $(n-1)$ 维立方体，而在这样一个立方体中我们有 $1 + P_1 > 1/2$ 。这就证明了结论。 ■

-
1. 即一个使得 C 的偏导数不全为 0 的解。↵