

更高次的齐次方程

Homogeneous equations of higher degree

在文献 [6] 中, Birch 给出了对我们处理齐次三次方程所用方法的一个意义深远的推广, 但这一推广涉及一些重要的修改。他考虑求解一个齐次方程, 或一组联立的齐次方程 (它们的次数全都相同) 的问题。这里人们面临两个严重的困难。首先, 即便对于单个次数为 $k > 3$ 的方程, 我们一般也不知道任何关于 k 的合理函数 $n_0(k)$, 使得当 $n \geq n_0(k)$ 时, 同余条件对每个素数都能被满足。(由 Brauer 的工作 (已在第 11 章中引用), 我们知道存在某个 k 的函数, 使得方程在 p -进域中可解。此外, 仅仅在 p -进域中有解还不够; 我们需要一个非奇异解, 以便确保能够满足同余条件。) 因此, 我们必须假定对每个素数 p , 同余条件都被满足。我们还必须假定该方程, 或方程组, 在实数域中可解, 并且具有一个非奇异解。

其次——而这一点更为重要——即便这些假定也不总是足以保证方程在整数 (或有理数) 中可解。下面这个例子是 Swinnerton-Dyer 给我看的:

$$3(x_1^2 + \cdots + x_r^2)^3 + 4(x_{r+1}^2 + \cdots + x_s^2)^3 = 5(x_{s+1}^2 + \cdots + x_n^2)^3, \quad (19.1)$$

其中 $r < s < n$ 。由 Selmer [78] 的工作可知, 方程

$$3X^3 + 4Y^3 = 5Z^3$$

除了 $X = Y = Z = 0$ 之外无解, 由此可推出 (19.1) 除了 $x_1 = \cdots = x_n = 0$ 之外无解。另一方面, 可以证明 (19.1) 对每个 p 满足同余条件, 并且它在实数域中当然也是非奇异可解的。

因此, 如果我们要建立整数可解性, 就必须施加某个进一步的条件。Birch 被引导施加的那类条件, 是用与方程组相关联的一个 ‘奇异轨迹’ 的维数来表述的。

我们将概述他的论文的总体规划，在可能有帮助的地方与单个三次方程的问题作比较。由于记号不可避免地复杂，细节相当繁难。

设有 R 个 n 元 k 次齐次型，其中 $R < n$ 。我们可以把它们写成

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\mathbf{x}) &= \sum_{j_0, \dots, j_{k-1}} C_{j_0, \dots, j_{k-1}}^{(1)} x_{j_0} \cdots x_{j_{k-1}}, \\ &\vdots \\ f^{(R)}(\mathbf{x}) &= \sum_{j_0, \dots, j_{k-1}} C_{j_0, \dots, j_{k-1}}^{(R)} x_{j_0} \cdots x_{j_{k-1}}, \end{aligned}$$

其中求和的变量从 1 到 n 。设 $\mathfrak{B}$ 为 n 维空间中的一个盒子，定义指数和

$$S(\alpha_1, \dots, \alpha_R) = \sum_{\mathbf{x} \in P\mathfrak{B}} e\left(\alpha_1 f^{(1)}(\mathbf{x}) + \cdots + \alpha_R f^{(R)}(\mathbf{x})\right).$$

那么， $P\mathfrak{B}$ 中满足联立方程 $f^{(1)}(\mathbf{x}) = 0, \dots, f^{(R)}(\mathbf{x}) = 0$ 的整点 $\mathbf{x}$ 的个数由下式给出

$$\mathcal{N}(P) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 S(\alpha_1, \dots, \alpha_R) d\alpha_1 \dots d\alpha_R.$$

由引理 13.1 的一个直接推广，我们发现，如果

$$|S(\alpha_1, \dots, \alpha_R)| \geq P^{n-K}, \quad (K > 0),$$

那么

$$\sum_{\mathbf{x}^{(1)}} \cdots \sum_{\mathbf{x}^{(k-1)}} \prod_{J=1}^n \min \left\{ P, \left\| \alpha_1 M_J^{(1)} + \cdots + \alpha_R M_J^{(R)} \right\|^{-1} \right\} \gg P^{nk-2^{k-1}K},$$

其中 $M_J^{(1)}, \dots, M_J^{(R)}$ 是 $k-1$ 个点 $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}$ 的多重线性型，由下式定义

$$M_J^{(i)}(\mathbf{x}^{(1)} \mid \cdots \mid \mathbf{x}^{(k-1)}) = \sum_{j_1, \dots, j_{k-1}} c_{J, j_1, \dots, j_{k-1}}^{(i)} x_{j_1}^{(1)} \cdots x_{j_{k-1}}^{(k-1)},$$

其中 $i = 1, \dots, R$ 。引理 13.1 本身就是 $R = 1, k = 3$ 的情形。正如在引理 13.2 中那样，由此推出，满足

$$|\mathbf{x}^{(1)}| < P, \dots, |\mathbf{x}^{(k-1)}| < P,$$

$$\|\alpha_1 M_J^{(1)} + \dots + \alpha_R M_J^{(R)}\| < P^{-1}, \quad (1 \leq J \leq n),$$

的 $k-1$ 个整点的组的个数

$$\gg P^{(k-1)n-2^{k-1}K-\varepsilon}.$$

把引理 12.6 使用 $k-1$ 次（而不是像引理 13.3 的证明中那样使用两次），我们推出，满足

$$|\mathbf{x}^{(1)}| < P^\theta, \dots, |\mathbf{x}^{(k-1)}| < P^\theta,$$

$$\|\alpha_1 M_J^{(1)} + \dots + \alpha_R M_J^{(R)}\| < P^{-k+(k-1)\theta}$$

的 $k-1$ 个整点的组的个数

$$\gg P^{(k-1)n\theta-2^{k-1}K-\varepsilon}.$$

如果在这些 $k-1$ 个点的组中存在某一个，使得矩阵

$$\begin{pmatrix} M_1^{(1)} & \dots & M_1^{(R)} \\ \vdots & & \vdots \\ M_n^{(1)} & \dots & M_n^{(R)} \end{pmatrix}$$

的秩为 R ，那么我们就得到对 $\alpha_1, \dots, \alpha_R$ 的良好有理逼近，它们都具有相同的分母 q 。这个分母来自上述矩阵中某个 R 阶行列式（非零）的值。事实上我们得到

$$|q\alpha_i - a_i| \ll P^{-k+R(k-1)\theta}$$

以及

$$q \ll P^{R(k-1)\theta}.$$

这里的指数分别对应于引理 13.4 的选择 B 中的 $-3 + 2\theta$ 与 2θ 。

真正的困难出现在上述情形失效时，即对所有的 $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}$ ，上述矩阵的秩都 $\leq R-1$ 时。在 $R=1$ 的情形，这将意味着多重线性型 M_J 在所有这些整点组上全

都消失。

Birch 论文的主要新思想，是用簇（variety）的维数来表述这种可能性。我们把一组 $k-1$ 个点看作 $(k-1)n$ 维空间中的单个点。上述矩阵的秩应 $\leq R-1$ 这一条件，在该空间中定义了一个代数簇；而由其上整点个数的下界，我们推出这个簇的维数

$$\geq (k-1)n - 2^{k-1}K/\theta + \varepsilon.$$

代数几何中一个简单的原理是：若我们用一个由 t 个方程定义的线性空间去与一个簇相交，则簇的维数（即其任一绝对不可约分量的最大维数）至多减少 t 。因此，上述簇与‘对角’线性空间

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)} = \dots = \mathbf{x}^{(k-1)}$$

（它由 $(k-2)n$ 个方程定义）的交，其维数

$$\geq n - 2^{k-1}K/\theta - \varepsilon.$$

如果 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} = \dots = \mathbf{x}^{(k-1)}$ ，则这个新簇由所有满足下列条件的点 $\mathbf{x}$ 组成：矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f^{(R)}}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f^{(R)}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

的秩 $\leq R-1$ 。我们称之为与给定方程相关联的奇异轨迹，并记为 V^* 。于是当前情形导致

$$\dim V^* \geq n - 2^{k-1}K/\theta - \varepsilon.$$

如果 $\dim V^* = s$ ，我们就可以通过选取

$$K = \frac{\theta}{2^{k-1}}(n - s - 2\varepsilon)$$

来阻止这种情况发生（从而排除现在对应于引理 13.4 选择 A 的局面）。

做出这一选择后，我们就有了一个类似于选择 B 的局面；也就是说，对每一组 $\alpha_1, \dots, \alpha_R$ ，要么有一个关于 $|S(\alpha_1, \dots, \alpha_R)|$ 的估计，要么有一组对 $\alpha_1, \dots, \alpha_R$ 的良好联立逼近。这在原则上为一种类似于第 15、16、17 章中处理单个三次方程的处理方法奠定了基础。

主要的困难在于奇异积分，而这里奇异簇的维数又一次起作用。对该积分的处理过于繁复，无法在此概述。本质上需要假设原始方程组定义一个维数为 $n - R$ 的簇。

Birch 论文的结果如下：

定理 19.1. 设 $f_1, \dots, f_R$ 是具有整系数的 n 元 k 次型，其中 $n > R \geq 1$ 。设 V 表示代数簇

$$f_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, f_R(\mathbf{x}) = 0,$$

并假设 V 的维数为 $n - R$ 。设 V^* 为相关联的奇异轨迹，并令 $s = \dim V^*$ 。假设 V 上有一个非奇异实点，并且对每个素数 p ， V 上有一个非奇异 p -进点。那么只要

$$n - s > R(R + 1)(k - 1)2^{k-1},$$

V 上就存在一个整点 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 。