

一个丢番图不等式

A Diophantine inequality

在丢番图不等式这一课题中，我们的目标是用整数解出某种给定类型的不等式，通常涉及具有任意实系数的多项式或形式。数的几何为研究线性不等式的可解性提供了有用的方法，并给出了关于高次多项式不等式的某些信息，但对于后者它的力量是有限的。

次数高于一次的最简单的丢番图不等式是

$$|\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2| < C.$$

基于与第 11 章中遇到的 Meyer 定理的类比，Oppenheim 在 1929 年猜想：只要 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是不全同号的实数，那么当 $n \geq 5$ 时，对所有 $C > 0$ ，该不等式都应可解。当然，如果 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 之间的比值都是有理的，我们就能令左端为零，因此问题关涉的是这些比值不全为有理数的情形。

1934 年 Chowla [13] 证明了当 $n \geq 9$ 时该结果成立；他是从 Jarník 和 Walfisz [51] 关于大椭圆内整点个数的结果推出来的。1945 年，Davenport 和 Heilbronn [26] 证明了它对 $n \geq 5$ 成立，本章主要致力于阐述这一证明。应当指出，尽管变量个数的界 5 在某种意义上是尽可能好的，但在更深层的意义上它很可能并非如此。如果我们假定比值 λ_i/λ_j 不全为有理数，那么（就我们所知）该结果对 $n \geq 3$ 也可能成立。

正式地表述，我们要证明的结果是：

定理 20.1. 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ 是实数，没有一个为 0，且既非全正也非全负。设其中至少有一个比值 λ_i/λ_j 是无理的。那么对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在不全为 0 的整数 $x_1, \dots, x_5$ ，使得

$$|\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_5 x_5^2| < \varepsilon.$$

不失一般性，我们可以假定

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_5 < 0, \quad \lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}.$$

只需证明下式可解即可

$$|\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_5 x_5^2| < 1, \quad (20.1)$$

因为在最后这个不等式中把 $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ 替换为 $\lambda_1/\varepsilon, \dots, \lambda_5/\varepsilon$ ，就可由此推出表面上更一般的不等式的可解性。

第一步是构造一个实变量 Q 的函数，它在 $|Q| < 1$ 时为正，在 $|Q| \geq 1$ 时为零。下面的引理给出了这样一个函数，但也存在各种类似的函数。

引理 20.1. 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e(\alpha Q) \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right)^2 d\alpha = \begin{cases} 1 - |Q|, & |Q| \leq 1, \\ 0, & |Q| \geq 1. \end{cases}$$

证. 众所周知

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right)^2 d\alpha = 1.$$

因此对任意实数 η ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi \eta \alpha}{\pi \alpha} \right)^2 d\alpha = |\eta|.$$

这给出

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e(\alpha Q) \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right)^2 d\alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi \alpha Q \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right)^2 d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi \alpha (Q+1) + \sin^2 \pi \alpha (Q-1) - 2 \sin^2 \pi \alpha}{(\pi \alpha)^2} d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \{|Q+1| + |Q-1| - 2|Q|\}, \end{aligned}$$

由此得到结论。 ■

设 P 是一个大的正整数。定义

$$S(\alpha) = \sum_{x=1}^P e(\alpha x^2), \quad I(\alpha) = \int_0^P e(\alpha x^2) dx.$$

在引理 20.1 的结果中取 $Q = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_5 x_5^2$, 并对 $x_1, \dots, x_5$ 求和, 我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda_1 \alpha) \cdots S(\lambda_5 \alpha) \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right)^2 d\alpha = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_5 \\ |Q| < 1}} (1 - |Q|), \quad (20.2)$$

其中求和遍历满足 $1 \leq x_j \leq P$ 且服从 (20.1) 的整数。类似地, 对 $x_1, \dots, x_5$ 积分而非求和, 我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\lambda_1 \alpha) \cdots I(\lambda_5 \alpha) \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right)^2 d\alpha = \int \cdots \int (1 - |Q|) dx_1 \cdots dx_5, \quad (20.3)$$

其中积分遍历满足 $0 \leq x_j \leq P$ 且服从 (20.1) 的实变量。

证明的总体思路是比较 (20.2) 与 (20.3)。容易证明当 $P \rightarrow \infty$ 时 (20.3) 的右端为 $\gg P^3$ (见下面的引理 20.2)。如果我们能够证明 (20.2) 与 (20.3) 的左端之差当 $P \rightarrow \infty$ 时为 $o(P^3)$, 那么就能推出 (20.2) 的右端也是 $\gg P^3$ 。这就意味着 (20.1) 有 $\gg P^3$ 组整数解 $(x_1, \dots, x_5)$, 且满足 $1 \leq x_j \leq P$ 。

我们将证明在 $\alpha = 0$ 附近有一个小区间, 在其中 $S_j(\alpha)$ 与 $I_j(\alpha)$ 相差很小, 并由此推出该区间对两个积分的贡献实际上相同 (引理 20.4)。容易证明对所有其他的 α , 对 (20.3) 左端积分的贡献可忽略不计。困难在于估计这样的 α 对 (20.2) 左端积分的贡献。正是在这里 (而且只在这里), 我们才用到 λ_1/λ_2 为无理数这一假设, 并且我们不会对所有大的 P 证明所论结果, 而只对某个特定序列证明。

引理 20.2. 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\lambda_1 \alpha) \cdots I(\lambda_5 \alpha) \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right)^2 d\alpha \gg P^3.$$

证. 在 (20.3) 的右端令 $|\lambda_i| x_i^2 = y_i$ 。除去一个常数因子外, 该积分变为

$$\int_0^{|\lambda_1|P^2} \cdots \int_0^{|\lambda_5|P^2} \{1 - |y_1 \pm y_2 \pm \cdots - y_5|\} (y_1 \cdots y_5)^{-1/2} dy_1 \cdots dy_5,$$

其中积分遍历满足 $|y_1 \pm y_2 \pm \cdots - y_5| < 1$ 的 $y_1, \dots, y_5$, 符号取 $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ 之符号。

我们把变量 y_2, y_3, y_4 限制在区间 $\frac{1}{2}\gamma P^2 < y_j < \gamma P^2$ 内, 把 y_5 限制在区间 $4\gamma P^2 < y_5 < 5\gamma P^2$ 内, 并把 y_1 限制在区间

$$|y_1 \pm y_2 \pm y_3 + y_4 - y_5| < \frac{1}{2}.$$

那么所有剩下的点都满足 $0 < y_j < |\lambda_j|P^2$, 只要 $9\gamma < \min |\lambda_j|$ 。因此我们有积分区域的一部分, 其体积为 $\gg (P^2)^4$ 。在此区域中, 被积函数为

$$\gg (y_1 \cdots y_5)^{-1/2} \gg (P^{10})^{-1/2}.$$

因此该积分为 $\gg P^3$ 。 ■

引理 20.3. 若 $|\alpha| < (4\lambda P)^{-1}$, 其中 $\lambda = \max |\lambda_j|$, 则

$$S(\lambda_j \alpha) = I(\lambda_j \alpha) + O(1).$$

证. 这是引理 9.1 (van der Corput 引理) 的一个特例, 其中 $f(x) = \lambda_j \alpha x^2$ 。我们有

$$|f'(x)| = |2\lambda_j \alpha x| \leq 2|\lambda_j \alpha|P \leq \frac{1}{2},$$

且 $f''(x)$ 符号固定。 ■

引理 20.4. 我们有

$$\int_{|\alpha| < (4\lambda P)^{-1}} S(\lambda_1 \alpha) \cdots S(\lambda_5 \alpha) \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right)^2 d\alpha \gg P^3.$$

证. 首先我们注意到, 对任意 α ,

$$|I(\lambda_j \alpha)| \ll \min(P, |\alpha|^{-1/2}).$$

估计 P 是显然的, 而估计 $|\alpha|^{-1/2}$ 则由

$$I(\lambda_j \alpha) = \int_0^P e(\lambda_j \alpha x^2) dx = \frac{1}{2} |\lambda_j \alpha|^{-1/2} \int_0^{|\lambda_j \alpha| P^2} t^{-1/2} e(\pm t) dt$$

推出, 因为最后这个积分是有界的。由引理 20.3 可知, 若 $|\alpha| < (4\lambda P)^{-1}$, 则也有

$$|S(\lambda_j \alpha)| \ll \min(P, |\alpha|^{-1/2})$$

成立。因此, 把这两个估计与引理 20.3 联用, 我们在上述区间内有

$$S(\lambda_1 \alpha) \cdots S(\lambda_5 \alpha) - I(\lambda_1 \alpha) \cdots I(\lambda_5 \alpha) \ll \min(P^4, \alpha^{-2}).$$

因此该差在 $|\alpha| < (4\lambda P)^{-1}$ 上的积分为 $O(P^2)$ 。

于是只需证明

$$\int_{|\alpha| < (4\lambda P)^{-1}} I(\lambda_1 \alpha) \cdots I(\lambda_5 \alpha) \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right)^2 d\alpha \gg P^3.$$

我们已知对应于区间 $(-\infty, \infty)$ 的积分确实如此。现在由上面对 $I(\lambda_j \alpha)$ 的估计, 我们有

$$\int_{|\alpha| \geq (4\lambda P)^{-1}} |I(\lambda_1 \alpha) \cdots I(\lambda_5 \alpha)| d\alpha \ll \int_{|\alpha| \geq (4\lambda P)^{-1}} \alpha^{-5/2} d\alpha \ll P^{3/2}.$$

因此结论得证。 ■

现在我们来问题的核心, 即对

$$\int_{|\alpha| \geq (4\lambda P)^{-1}} |S(\lambda_1 \alpha) \cdots S(\lambda_5 \alpha)| \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right)^2 d\alpha$$

的估计。

引理 20.5. 对任意 $\varepsilon > 0$, 我们有

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^4 d\alpha \ll P^{2+\varepsilon}.$$

证. 由 $S(\alpha)$ 的定义, 该积分等于 $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$ 在 1 到 P (含) 之间的整数解的个数。其中 $x_2 = y_2$ 的解的个数为 P^2 。在其他解中, x_2 和 y_2 的值决定了 $x_1 - y_1$ 和 $x_1 + y_1$ 的值, 它们是 $x_2^2 - y_2^2$ 的因子, 至多有 P^ε 种可能。由此得结论。 ■

引理 20.6. 对任意固定的 $\delta > 0$, 我们有

$$\int_{|\alpha| \geq P^\delta} |S(\lambda_1 \alpha) \cdots S(\lambda_5 \alpha)| \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right)^2 d\alpha \ll P^{3-\delta/2}.$$

证. 鉴于平凡估计 $|S(\lambda_5 \alpha)| \leq P$, 只需证明

$$\int_{|\alpha| \geq P^\delta} |S(\lambda_1 \alpha) \cdots S(\lambda_4 \alpha)| \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right)^2 d\alpha \ll P^{2-\delta/2}.$$

由 Hölder 不等式, 只需证明

$$\int_{|\alpha| \geq P^\delta} |S(\lambda_j \alpha)|^4 \left(\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \right)^2 d\alpha \ll P^{2-\delta/2},$$

因而只需证明

$$\int_{|\alpha| \geq P^\delta} |S(\alpha)|^4 \frac{d\alpha}{\alpha^2} \ll P^{2-\delta/2}.$$

由于 $S(\alpha)$ 以 1 为周期, 引理 20.5 蕴含

$$\int_m^{m+1} |S(\alpha)|^4 d\alpha \ll P^{2+\varepsilon}.$$

因此, 若 $M = [P^\delta]$, 所论积分至多为

$$\begin{aligned} \sum_{m=M}^{\infty} \int_m^{m+1} |S(\alpha)|^4 \frac{d\alpha}{\alpha^2} &\ll P^{2+\varepsilon} \sum_{m=M}^{\infty} \int_m^{m+1} \frac{d\alpha}{\alpha^2} \\ &\ll P^{2+\varepsilon} M^{-1} \\ &\ll P^{2-\delta+\varepsilon} \\ &\ll P^{2-\delta/2}. \end{aligned}$$

由此得结论。 ■

由 (20.2) 以及引理 20.4 和引理 20.6, 只需证明

$$\int_{(4\lambda P)^{-1} < |\alpha| < P^\delta} |S(\lambda_1 \alpha) \cdots S(\lambda_5 \alpha)| d\alpha = o(P^3).$$

因为这样一来 (20.2) 的右端就为 $\gg P^3$, 这正是我们想证明的。如前所述, 我们只能对某些受限的 P 值证明这一点。

由引理 20.5 和 Hölder 不等式可得

$$\int_{(4\lambda P)^{-1} < |\alpha| < P^\delta} |S(\lambda_{i_1} \alpha) \cdots S(\lambda_{i_4} \alpha)| d\alpha \ll P^{2+\delta+\varepsilon}$$

这对任意四个不同的下标 $i_1, \dots, i_4$ 都成立。把它分别用于下标 2, 3, 4, 5 和 1, 3, 4, 5, 我们看到只需对积分范围内的每个 α 都有

$$\min(|S(\lambda_1 \alpha)|, |S(\lambda_2 \alpha)|) \ll P^{1-2\delta} \quad (20.4)$$

即可。为此我们必须用到 λ_1/λ_2 的无理性。

引理 20.7. 设 $(a, q) = 1$ 且 $|\alpha - a/q| < q^{-2}$ 。那么

$$|S(\alpha)| \ll P^{1+\varepsilon} \left\{ P^{-1/2} + q^{-1/2} + \left(\frac{P^2}{q} \right)^{-1/2} \right\}.$$

证. 这是引理 3.1 (Weyl 不等式), 其中 $k = 2$, 因而也有 $K = 2$. ■

我们选取 λ_1/λ_2 的连分数的任一渐近分数 a_0/q_0 , 于是有

$$\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{a_0}{q_0} \right| < \frac{1}{q_0^2}. \quad (20.5)$$

我们取 $P = q_0^2$; 这将 P 限制为一个无穷序列的取值。

引理 20.8. 当 P 受上述限制时, 估计 (20.4) 对范围 $(4\lambda P)^{-1} < \alpha < P^\delta$ 内的每个 α 都成立。

证. 存在 $\lambda_1\alpha$ 的一个有理逼近 a_1/q_1 , 使得

$$(a_1, q_1) = 1, \quad 1 \leq q_1 \leq P^{3/2}, \quad \left| \lambda_1\alpha - \frac{a_1}{q_1} \right| < \frac{1}{q_1 P^{3/2}}. \quad (20.6)$$

我们注意到 $a_1 \neq 0$, 因为若 $a_1 = 0$, 则 $|\lambda_1\alpha| < P^{-3/2}$, 与假设矛盾. 类似地, 存在 $\lambda_2\alpha$ 的一个有理逼近 a_2/q_2 , 使得

$$(a_2, q_2) = 1, \quad 1 \leq q_2 \leq P^{3/2}, \quad \left| \lambda_2\alpha - \frac{a_2}{q_2} \right| < \frac{1}{q_2 P^{3/2}}, \quad (20.7)$$

并且同样有 $a_2 \neq 0$.

若 $q_1 > P^{5\delta}$, 我们可以对 $S(\lambda_1\alpha)$ 应用引理 20.7, 以 a_1, q_1 代替 a, q , 这给出¹

$$|S(\lambda_1\alpha)| \ll P^{1+\varepsilon-5\delta/2} \ll P^{1-2\delta}.$$

类似地, 若 $q_2 > P^{5\delta}$, 我们对 $|S(\lambda_2\alpha)|$ 得到相应的结果. 在这两种情形的任一种下, (20.4) 都满足. 因此我们可以假定

$$q_1 \leq P^{5\delta}, \quad q_2 \leq P^{5\delta}. \quad (20.8)$$

现在我们可以从 (20.6) 和 (20.7) 推出 λ_1/λ_2 被 a_1q_2/a_2q_1 很好地逼近. 我们注意到, 由于 a_1/q_1 是 $\lambda_1\alpha$ 的一个逼近, 且 $|\alpha| < P^\delta$, 我们有 $|a_1| \ll P^{6\delta}$, 类似地 $|a_2| \ll P^{6\delta}$. 因此

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= \frac{\lambda_1\alpha}{\lambda_2\alpha} = \frac{\frac{a_1}{q_1} (1 + O(P^{-3/2}))}{\frac{a_2}{q_2} (1 + O(P^{-3/2}))} \\ &= \frac{a_1q_2}{a_2q_1} (1 + O(P^{-3/2})), \end{aligned}$$

又由于 $|a_1q_2/a_2q_1|$ 有上界, 这蕴含

$$\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{a_1q_2}{a_2q_1} \right| \ll P^{-3/2}.$$

我们有 $1 \leq |a_2q_1| \ll P^{11\delta}$.

将最后这个结果与 (20.5) 比较, 若 δ 足够小 (且 q_0 足够大), 就得到一个矛盾. 因为我们有

$$\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{a_1 q_2}{a_2 q_1} \right| \ll P^{-3/2} + q_0^{-2} \\ \ll q_0^{-2},$$

这里 $P = q_0^2$ ，而左端却是

$$\geq \frac{1}{q_0 |a_2| q_1} \gg \frac{1}{q_0 P^{11\delta}} \gg q_0^{-1-6\delta}.$$

这就完成了引理 20.8 的证明；而由我们前面的论述，引理 20.8 完成了定理 20.1 的证明。 ■

注记. 定理 20.1 的某些推广几乎是显然的。首先，对于不等式

$$|\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_5 x_5^2 - \mu| < \varepsilon,$$

对任意实数 μ （假设比值 λ_i/λ_j 不全为有理数），我们可以证明同样的结果。其次，我们可以把平方替换为 k 次幂，只要变量个数至少为 $2^k + 1$ 。在这种情形下，我们应当用 Hua 不等式（引理 3.2）代替上面的引理 20.7。更精确的结果已由 Davenport 和 Roth [30] 以及 Danicic [16] 证明。

注记. 把丢番图不等式推广到涉及具有实系数的一般形式（而非加性形式）的情形，所遇困难也许比丢番图方程的相应推广还要大。

迄今所得的全部结果都依赖于关于丢番图方程的结果，而且通常需要其更精确的形式，即对解的大小有一个估计。

自然首先出现的问题是建立下式的可解性

$$|Q(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon \tag{20.9}$$

对任意 $\varepsilon > 0$ ，其中 Q 是任意不定二次型。通过一些非常复杂的工作，已经证明它当 $n \geq 21$ 时成立，该工作是 Birch、Davenport 和 Ridout [70] 的联合成果。由 Oppenheim [64, 65] 的一个结果可知，如果 Q 不与整系数形式成比例，那么不等式

$$|Q(x_1, \dots, x_n) - \mu| < \varepsilon,$$

对任意实数 μ 都是可解的。于是，任意实不定二次型在 21 个或更多个变量中的取值，要么是离散的（如果该形式与整形式成比例），要么处处稠密。

对任意实三次型，(20.9) 的类似结果已由 Pitman [66] 证明，但所需的变量个数相当大。对于五次的形式，证明任何类似结果似乎存在原则性的困难。

1. 我们假定 δ 很小。↵